Séries e Equações Diferenciais
Lista 05 – EDO's de Primeira Ordem e Aplicações

Professor: Daniel Henrique Silva

Teoria Geral para EDOLH

1) Defina Equação Diferencial Ordinária Linear (EDOL)

2) Defina Equação Diferencial Ordinária Linear Homogênea (EDOLH)

3) Demonstre que, se uma função $y_1(x)$ é solução da EDO dada por $f_2(x) \cdot y'' + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = 0$, então qualquer função da forma $\mathcal{Y}(x) = C_1 y_1(x)$ também será solução, para qualquer $C_1 \in \mathbb{R}$.

4) Demonstre que, se duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO dada por $f_2(x) \cdot y'' + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = 0$, então quaisquer combinações da forma $\mathcal{Y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ também serão soluções da mesma EDO.

5) Considere a EDO dada por $y'' - y = 0$
   a) Demonstre que a função $y(x) = e^x$ é solução dessa EDO.
   b) Argumente porque $y(x) = C_1 e^x + C_2 \left(\frac{e^x}{4}\right)$ não é a solução geral dessa equação.

6) Explique porque é necessário mais de um ponto para se determinar uma solução única num PVI de segunda ordem.

7) Para cada conjunto de funções a seguir, verifique se o conjunto é LI ou LD.
   a) $\{1; x\}$
   b) $\{\cos(x)\, ; sen(x)\}$
   c) $\{e^x; 2^x\}$
   d) $\{\ln(x)\, ; \log_2(x)\}$
   e) $\{\cos^2(x)\, ; sen^2(x); 1\}$
   f) $\{\cos(x)\, ; sen(x); tg(x)\}$
   g) $\{sen(x); \cos(x)\, ; sen(2x)\}$
   h) $\{e^x; xe^x; e^{-x}\}$
   i) $\{1; x; x^2; x^3\}$

8) Demonstre que, se $\{y_1; y_2\}$ é um conjunto LI, então $\{y_1 - y_2; y_1 + y_2\}$ também será LI.

9) Demonstre que, se $\{y_1; y_2; y_3\}$ é um conjunto LI, então $\{y_1; y_1 + y_2; y_1 + y_2 + y_3\}$ também será LI.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares e Homogêneas.

10) Demonstre que, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\left\{e^{(\lambda_1)t}; e^{(\lambda_2)t}\right\}$ é um conjunto LI.

11) Demonstre a relação de Euler: $e^{it} = \cos(t) + isen(t)$, onde $i^2 = -1$

12) Demonstre que $e^{(a+bi)t} = e^{at}\big(\cos(bt) + isen(bt)\big)$

13) Demonstre que $e^{(a-bi)t} = e^{at}\big(\cos(bt) - isen(bt)\big)$

14) O objetivo desse exercício é demonstrar que o conjunto gerado pelas funções $\left\{e^{(a+bi)t}; e^{(a-bi)t}\right\}$ é o mesmo conjunto que o gerado pelas funções $\{e^{at}\cos(bt)\, ; e^{at}sen(bt)\}$. Para demonstrar isso, siga os passos:
   a) Demonstre que o conjunto $\left\{e^{(a+bi)t}; e^{(a-bi)t}\right\}$ é L.I.

b) Demonstre que $e^{at}\cos(bt)$ e $e^{at}sen(bt)$ podem ser escritos como combinação linear dos elementos desse conjunto.

c) Demonstre que o conjunto $\{e^{at}\cos(bt)\,;e^{at}sen(bt)\}$ é L.I.

15) Seja uma EDOLSOCCH da forma $Ay'' + By' + Cy = 0$, tal que $B^2 - 4AC = 0$.

a) Demonstre que $e^{-\frac{B}{2A}t}$ é uma das raízes.

b) Aplique o método de redução de ordem, e prove que a segunda raiz é sempre $t \cdot e^{\left(-\frac{B}{2A}\right)t}$

16) Para cada uma das equações diferenciais homogêneas dadas a seguir, determine a solução geral.

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$
b) $y'' - 7y' + 6y = 0$
c) $y'' + 6y' + 9y = 0$
d) $4y'' - 12y' + 9y = 0$
e) $y'' - 6y' + 13y = 0$
f) $2y'' + 2y' + 5y = 0$
g) $y''' + 2y'' + y' = 0$
h) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
i) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$
j) $y''' - y'' - y' - 15y = 0$
k) $y'''' + 10y'' + 9y = 0$
l) $y'''' - 6y''' + 9y'' + 6y' - 10y = 0$

17) As chamadas *Equações de Euler* são equações da forma $Ax^2y'' + Bxy' + Cy = f(x)$

a) Admita que $f(x) = 0$ (ou seja, estamos no caso homogêneo). Mostre que, ao supormos que a solução é da forma $y(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$, nós teremos uma equação de segundo grau que determine possíveis valores para n.

b) Quais serão as soluções da EDO, se a equação de segundo grau do item anterior admitir duas soluções reais distintas?

c) Quais serão as soluções da EDO, se a equação de segundo grau do item anterior admitir duas soluções complexas?

d) Quais serão as soluções da EDO, se a equação de segundo grau do item anterior admitir duas soluções reais iguais?

18) Baseado na questão anterior, resolva as EDO's:

a) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$
b) $x^2y'' + xy' - 3y = 0$
c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
d) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

19) Considere um corpo, de massa m, preso a uma mola de constante elástica k, que é posto em movimento a uma distância inicial x_0 unidades a partir da sua posição de equilíbrio, com velocidade inicial V_0. Essa mola sofre ação de uma forma de resistência, proporcional à velocidade (admita que a constante de proporcionalidade é γ, conhecida). Modele um PVI que descreva a posição desse corpo em função do tempo.

20) Na situação da questão anterior, admita que não há forças dissipativas, ou seja $\gamma = 0$.

a) Determine a equação do movimento, e verifique que o corpo irá fazer um movimento harmônico.

b) Determine a amplitude, frequência e período do movimento, em função das constantes $m; k; x_0; V_0$.

21) Um corpo de 3Kg, preso a uma mola de constante elástica $12N/m$ é posto em movimento, a partir da posição de equilíbrio, com velocidade inicial de 10m/s. Admita que não hajam forças dissipativas para esse movimento.

a) Determine uma equação para o movimento dessa partícula. O resultado é compatível com o do exercício anterior?

b) Determine a amplitude, frequência e período do movimento.

22) Se, na mola do exercício anterior, agir uma força dissipativa, de constante $\gamma =$ 12Kg/s:

a) Qual a equação do movimento da partícula?

b) O que acontece com a amplitude do movimento para um tempo muito grande?

c) O que acontece com a frequência do movimento, em relação à questão anterior?

23) Um corpo de 1Kg, preso a uma mola de constante elástica 0,01N/m é solto a partir do repouso, a uma posição que fica a 20cm de sua posição de equilíbrio. Imagine que para esse corpo, haja uma força de resistência, cuja constante é $\gamma = 0.05$Kg/s.

a) Qual a equação do movimento da partícula?

b) Determine o instante no qual a partícula para pela primeira vez.

24) A carga em um circuito RLC (Resistor-Indutor-Capacitor), sem fonte de força eletromotriz (bateria) externa pode ser modelada através de uma EDOLSOCCH. Imagine um circuito que tenha um capacitor carregado com carga inicial

Q_0, e corrente inicial I_0, um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C, e um indutor de indutância L. Sabendo-se que:

- A ddp no capacitor é igual à $\frac{Q}{C}$
- A ddp no resistor é igual à $R \cdot I$
- A ddp no indutor é igual à $L \cdot \frac{dI}{dt}$
- A corrente I é definida como a taxa de variação da carga pelo tempo.
- A soma das ddp's num circuito é nula.

a) Modele um PVI que calcule a carga no capacitor através do tempo.
b) Resolva o PVI em função das constantes $Q_0; I_0; C; L; R$
c) Como determinar a corrente que percorre o circuito em função do tempo a partir da carga?
c) Se $R = 0$, o circuito irá possuir corrente alternada, ou corrente contínua? Justifique.
d) Se $L = 0$, o circuito irá possuir corrente alternada, ou corrente contínua? Justifique.

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Não Homogêneas

25) Seja uma EDOLNH da forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, na qual $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ é solução da equação homogênea associada, e y_P é uma solução particular qualquer da EDOLNH. Demonstre que $y_H + y_P$ também será solução da EDOLNH.

26) Descreva com suas palavras como funciona o método dos coeficientes a determinar, e diga em quais situações ele pode ser aplicado.

27) Descreva com suas palavras como funciona o método da variação dos parâmetros, e diga em quais situações ele pode ser aplicado.

28) Resolva as EDOLSOCCNH a seguir, pelo método que julgar mais conveniente

a) $y'' - 5y' + 6y = 4e^{-2t}$
b) $y'' + 7y' + 6y = 3t - 11$
c) $y'' + 8y' + 16y = \cos(3t)$
d) $y'' - 4y' + 5y = sen(t) - t^2$
e) $y'' + y = \cos(2t)$
f) $y'' - 2y' + y = 16e^t$
g) $y'' + 3y' - 4y = tcos(2t)$
h) $y'' - 2y' - 3y = te^{2t} - 4$
i) $y'' - y = sen^2(3t)$
j) $y'' + y = 2^t$
k) $y'' + y' = \cos(t) \cdot sen(3t)$
l) $y'' + y = \sec(t)$
m) $y'' + 4y = tg(2t)$

29) Nas *Equações de Euler* (Definidas na seção anterior dessa lista), para determinar a solução particular de um caso não-homogêneo, os dois métodos aprendidos em sala são aplicáveis? Justifique.

30) Resolva as EDO's a seguir:

a) $x^2y'' + 3xy' - 3y = \frac{12}{x}$
b) $x^2y'' + xy' - 3y = \sqrt{x}$
c) $x^2y'' + 3xy' + 5y = \frac{\ln(x)}{x}$
d) $x^2y'' + 3xy' + y = \ln^2(x)$

31) Considere um corpo, de massa m, preso a uma mola de constante elástica k, que é posto em movimento a uma distância inicial x_0 unidades a partir da sua posição de equilíbrio, com velocidade inicial V_0. Essa mola sofre ação de uma forma de resistência, proporcional à velocidade (admita que a constante de proporcionalidade é γ, conhecida), e além disso, o corpo está sujeito à ação de uma força externa $F(t)$, que varia com o tempo. Modele um PVI que descreva a posição desse corpo em função do tempo.

32) Considere um corpo de $1Kg$, preso a uma mola de constante elástica $K = 25N/m$, sem forças de resistência, que parte do repouso, a partir da posição de equilíbrio da mola, e sofre ação de uma força crescente de $F(t) = \frac{t}{100}$ (Força em Newtons).

a) Modele um PVI que descreva a posição da partícula em função do tempo.
b) Resolva esse PVI.
c) Com auxílio de software gráfico, esboce o gráfico de posição por tempo para esse sistema massa-mola.
d) Esse resultado faz sentido fisicamente? Justifique.

33) Considere um corpo de $2Kg$, preso a uma mola de constante elástica $K = 8N/m$, sem forças de resistência, que parte do repouso, a uma distância de $20cm$ da sua posição de equilíbrio, e sofre ação de uma força oscilatória de $F(t) = 10\cos(t)$ (Força em Newtons).

a) Modele um PVI que descreva a posição da partícula em função do tempo.

b) Resolva esse PVI.

c) Com auxílio de software gráfico, esboce o gráfico de posição por tempo para esse sistema massa-mola.

34) Um sistema massa-mola, quando livre de forças dissipativas, tem a sua "frequência natural de oscilação". Imagine um corpo de massa $1Kg$, preso a uma mola de constante elástica $K = 4N/m$, partindo do ponto de equilíbrio da mola, e com velocidade inicial nula.

a) Determine a frequência de oscilação natural desse corpo.

b) Imagine agora que ele sofra uma força externa $F(t) = \cos(2t)$. Determine a equação do movimento dessa partícula.

c) Faça um esboço gráfico desse movimento com algum software, nos primeiros 100 segundos.

d) Se a força externa for de $F(t) = \cos(1{,}9t)$, determine a equação do movimento da partícula.

e) Faça um novo esboço gráfico do movimento, nos primeiros 100 segundos.

f) (Item opcional) Quais fenômenos físicos foram retratados nos itens anteriores?