Séries e Equações Diferenciais

Lista 04 – EDO's de Primeira Ordem e Aplicações

Professor: Daniel Henrique Silva

Introdução às Equações Diferenciais

1) Defina equação diferencial.

2) Seja $f(x;y)$ uma função de duas variáveis. A equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ é uma equação diferencial ordinária? Justifique.

3) Defina ordem de uma equação diferencial.

4) Dê a ordem das EDO's a seguir:

a) $y' - 3y = 0$
b) $y''' + \cos(y) \cdot y' = 2x$
c) $(y'')^3 + y''' - y' \cdot y^5 = 0$

5) Dê um exemplo que mostre como uma EDO pode ter infinitas soluções distintas.

6) Considere a EDO dada por $y' = 3y$.

a) Determine um valor de λ para que $y(x) = e^{\lambda x}$ seja solução da EDO.

b) Mostre que, para o valor de λ encontrado no item anterior, então $y(x) = C \cdot e^{\lambda x}$ também será solução da EDO, independente do valor de $C \in \mathbb{R}$

c) Utilizando software gráfico, esboce o gráfico de algumas curvas do tipo $y(x) = C \cdot e^{\lambda x}$, para diferentes valores de $C \in \mathbb{R}$, e verifique que dois gráficos nunca se cruzarão, independente do valor de C.

d) Mostre que, dado um ponto $(x_0; y_0)$, sempre existirá um valor de $C \in \mathbb{R}$ tal que o gráfico da função $y(x) = C \cdot e^{\lambda x}$ passará por esse ponto.

7) Resolva (baseado na questão anterior), o PVI $\begin{cases} y' = 3y \\ y(2) = -3 \end{cases}$

8) Defina problema de valor inicial.

9) Qual a diferença entre uma EDO e um PVI?

Teorema de Existência e Unicidade para EDOPO

10) Enuncie o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem.

11) Considere o PVI dado por $\begin{cases} y' = -\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Mostre que esse PVI admite uma solução constante.

b) Mostre que a função $y(x) = \cos(x)$ também é solução desse PVI.

c) O fato de esse PVI possuir ao menos duas soluções distintas vai contra o teorema de existência e unicidade? Justifique.

12) Para cada PVI dado, determine a maior região de $\mathbb{R}^2$ onde a existência de solução única é garantida teoricamente:

a) $\begin{cases} ty' - \frac{3y}{t^2-9} = \cos(3t) \\ y(2) = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{y'}{sen(t)} + tg(y) = \ln(20-t) \\ y(15) = 2 \end{cases}$

EDOPO Separáveis

13) Defina EDOPO separável.

14) Demonstre que $\int f\big(y(t)\big) \cdot y'(t)dt = \int f(y)dy$

15) Resolva às seguintes EDO's ou PVI's, em cada item:

a) $y' = -\frac{x}{y}$

b) $x^2y' = -\frac{3}{\sqrt{y}}$

c) $\begin{cases} y' = \frac{x^4}{y(x^5+4)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

d) $y' + y^2 sen(x) = 0$

e) $xy' + x^2 = y' - 1$

f) $\begin{cases} y' = \frac{e^x - x^2}{3y+1} \\ y(0) = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{y' \cdot \cos^2(y)}{\cos^2(x)} = 1 \\ y(\pi) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

16) O decaimento radioativo de um elemento químico ocorre de modo que a taxa de decaimento do material radioativo é diretamente proporcional à quantidade de material radioativo presente na amostra. Admita que uma amostra tem inicialmente M_0 unidades de massa de material radioativo, e que essa amostra decaia naturalmente como descrito.

a) Modele um PVI que determine uma função $M(t)$ que calcule a massa de material radioativo na amostra, após um tempo t.

b) Resolva esse PVI em função de M_0, e da constante de proporcionalidade λ.

17) O tempo de meia-vida de um isótopo de Fluor-18 é de 1.83 horas aproximadamente. Uma amostra contém inicialmente 1Kg de Fluor-18, e decai naturalmente seguindo a lei de decaimento (do exercício anterior).

a) Determine uma função que dê a quantidade de material radioativo na amostra em função do tempo.

b) Qual a quantidade de material radioativo restante na amostra após a primeira hora?

c) Quanto tempo é necessário até que a quantidade de material na amostra seja de 200g?

18) O Californium, possui um tempo de meia-vida muito, muito grande, de 898 anos. Obviamente, esse tempo não foi medido experimentalmente até que uma amostra tenha atingido metade de sua massa. Qual o tempo necessário para que uma amostra de massa M_0 atinja 99% de sua massa inicial?

19) Com os dados do exercício de modelagem para o problema de decaimento radioativo, determine o valor da constante λ em função do tempo de meia vida do material radioativo.

20) A lei de resfriamento de Newton diz que, em um lugar onde a temperatura ambiente é constante, um corpo resfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o ambiente e o corpo. Admita que em um local onde a temperatura ambiente é constante e vale T_A, um corpo, inicialmente a uma temperatura $T_0 \neq T_A$, varia sua temperatura respeitando a lei de resfriamento de Newton.

a) Modele um PVI que determine a temperatura T do corpo em função do tempo t, da constante de proporcionalidade λ, e das temperaturas $T_0; T_A$.

b) Resolva esse PVI.

c) Mostre que, se o tempo for muito grande, então a temperatura do corpo tende à T_A.

21) Um copo de suco, inicialmente à 5ºC, é deixado em uma mesa, numa sala onde a temperatura ambiente é de 30ºC. Depois de 10 minutos, a temperatura do suco é de 15ºC.

a) Modele um PVI que determine a temperatura do suco em função do tempo.

b) Calcule a temperatura depois de meia hora.

c) Determine em quanto tempo a temperatura do copo será de 25ºC.

EDOPO Lineares

22) Defina EDOPO linear.

23) Deduza a fórmula do fator integrante para EDOPO Lineares.

24) Demonstre que, se $y(t)$ e $a(t)$ são funções diferenciáveis, então $\left(y(t)\cdot e^{\int a(t)dt}\right)' = y'(t)\cdot e^{\int a(t)dt} + a(t)\cdot e^{\int a(t)dt}\cdot y(t)$

25) Explique porque a constante de integração é irrelevante no cálculo do fator integrante $\mu(t) = e^{\int a(t)dt}$, apesar de a integral ser indefinida.

26) Dada uma EDOPO Linear, de forma $y' + ay = b$, deduza, em função de $a(t); b(t)$, a solução geral dessa EDO. (OBS: Essa dedução ficará em função de algumas integrais. **É altamente recomendado que você NÃO decore essa fórmula.** Ela é difícil, e pode gerar confusões! No entanto, essa dedução é um exercício interessante)

27) Resolva as seguintes EDO's ou PVI's, em cada item:

a) $y' + 3y = t + e^{-2t}$

b) $y' + \frac{y}{t} = 3\cos(2t)$

c) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$

d) $(1+t^2)y' + 4ty = \frac{1}{(1+t^2)^2}$

e) $ty' + 2y = t^2 - t + 1, y(1) = \frac{1}{2}$

f) $ty' + 2y = sen(2t), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

g) $y' + (1-2t)y = \ te^{-t}, y(0) = 2$

h) $y' + 5x^4y = x^4; y(0) = -3$

28) Um corpo em queda, quando sofre ação da resistência do ar, tem uma força de resistência contrária ao movimento, proporcional à velocidade do corpo (em módulo), e contrária ao movimento. Imagine um corpo de massa $m,$ em queda, sendo solto com uma velocidade inicial V_0, em um local onde a gravidade é g.

a) Modele um PVI que determine a velocidade da partícula em função de $m; g; V_0;$ e da constante de proporcionalidade, γ.

b) Resolva esse PVI em função desses parâmetros.

29) Um corpo <u>lançado para cima</u>, quando sofre ação da resistência do ar, tem uma força de resistência contrária ao movimento, proporcional à velocidade do corpo (em módulo), e contrária ao movimento. Imagine um corpo de massa $m,$ lançado para cima, com uma velocidade inicial V_0, em um local onde a gravidade é g.

a) Modele um PVI que determine a velocidade da partícula em função de $m; g; V_0;$ e da constante de proporcionalidade, γ.

b) Resolva esse PVI em função desses parâmetros.

c) Qual a diferença entre as respostas dessa questão, e da questão anterior?

30) Sem fazer cálculos, responda às perguntas:

a) Em um lançamento para cima com resistência do ar, o tempo do movimento de subida é maior, menor, ou igual ao tempo de descida?

b) Em um lançamento para cima com resistência do ar, a velocidade de impacto na queda é maior, menor ou igual à velocidade de lançamento em módulo?

31) Um corpo é lançado para cima em um local onde a gravidade é $g = 9.81m/s^2$, com velocidade inicial de $V_0 = 50m/s$. Esse corpo sobe durante 4 segundos, sofrendo ação da resistência do ar, quando para seu movimento. Depois disso, ele inicia um movimento de queda, ainda sobre ação da resistência do ar.

a) Modele um PVI que determine a velocidade do corpo durante o movimento de subida desse corpo.

b) Resolva esse PVI

c) Determine a altura máxima que o corpo atinge.

d) Modele outro PVI, dessa vez para determinar a velocidade do corpo durante a queda.

e) Determine o tempo de queda do corpo

f) Determine a velocidade com a qual o corpo retorna ao chão.

32) Um tanque, inicialmente com V litros de água pura, recebe, a cada segundo, L litros de uma solução de concentração c (em gramas por litro) unidades de um sal. Ao mesmo tempo, esse tanque elimina L litros da mistura para o meio externo. Assuma que a solução dentro do tanque é sempre homogênea (ou seja, a concentração no tanque todo é sempre a mesma, instantaneamente).

a) Modele um PVI que determine a quantidade de sal nesse tanque em função do tempo.
b) Resolva esse PVI em função de L e c
c) Determine uma função para a concentração de sal no tanque em função do tempo.
d) Calcule o que acontece se deixarmos esse sistema fluir por bastante tempo.

33) Um tanque, inicialmente com V litros de água pura, recebe, a cada segundo, L_1 litros de uma solução de concentração c (em gramas por litro) unidades de um sal. Ao mesmo tempo, esse tanque elimina $L_2 \neq L_1$ litros da mistura para o meio externo. Assuma que a solução dentro do tanque é sempre homogênea (ou seja, a concentração no tanque todo é sempre a mesma, instantaneamente).
a) Modele um PVI que determine a quantidade de sal nesse tanque em função do tempo.
b) Resolva esse PVI em função de $L_1; L_2$ e c
c) Determine uma função para a concentração de sal no tanque em função do tempo.

34) Um grande tanque, com capacidade de 300litros, está cheio de uma mistura de concentração 7g/ℓ de ácido sulfúrico. Nesse tanque, é jogada, a uma taxa de 3ℓ/s, água pura, e, ao mesmo tempo, é eliminada à mesma taxa de 3ℓ/s, do conteúdo do tanque.
a) Determine a quantidade de ácido presente no tanque em função do tempo.
b) Determine a concentração de ácido presente no tanque em função do tempo.
c) Após quanto tempo a concentração no tanque cairá para 2g/ℓ?

35) No tanque do exercício anterior, imagine que sejam eliminados 2ℓ/s da mistura do tanque, mas que ainda haja uma entrada de 3ℓ/s de água pura.
a) Determine a quantidade de ácido presente no tanque em função do tempo.
b) Determine a concentração de ácido presente no tanque em função do tempo.
c) Após quanto tempo a concentração no tanque cairá para 2g/ℓ?

EDOPO de Bernoulli

36) Defina equação diferencial de Bernoulli

37) Descreva passo a passo (diga quais são os passos) como se resolver uma EDOPO de Bernoulli.

38) Seja uma equação da forma $y' + ay = by^n$, onde $n \neq 0; n \neq 1, n \in \mathbb{R}$. Dê a solução dessa equação em função de $a(t); b(t)$ e n. (OBS: Essa dedução ficará em função de algumas integrais. **É altamente recomendado que você NÃO decore essa fórmula.** Ela é difícil, e pode gerar confusões! No entanto, essa dedução é um exercício interessante)

39) Resolva às seguintes EDO's ou PVI's:

a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}$

b) $xy' + 4y = \sqrt{y}, \;\; y(1) = 1$

c) $y' = (y - x)^2$

d) $t^2y' + 2ty = y^3, y(1) = 2$

e) $y' = \alpha y - \beta y^2$ (em função de $\alpha; \beta$)

f) $y' = \alpha y - \beta y^3$ (em função de $\alpha; \beta$)

40) Um modelo para propagação de eventos (pode ser uma notícia, ou vírus zumbi, ou uma doença…) diz que, a velocidade na qual um evento se propaga em uma população é diretamente proporcional à população que está atingida pelo evento, e também é diretamente proporcional à população ainda não atingida pelo evento. Imagine uma população, na qual P_0 (em porcentagem) da população já foi atingida pelo evento em um instante inicial.
a) Modele um PVI que determine a porcentagem da população atingida pelo evento em função do tempo.
b) Resolva esse PVI, em função de P_0, e da constante de proporcionalidade λ.
c) Mostre que, se $0 < P_0 < 1$, então, o evento se propaga para a população toda conforme o tempo tende a infinito.
d) O que acontece com a solução do problema se $P_0 = 0$? Interprete isso em termos práticos.

41) Uma notícia de interesse nacional (digamos, o resultado de um jogo de futebol), se propaga de acordo com o modelo da questão anterior. Suponha que no instante logo após o término da partida, 2% da população do país tenha assistido o jogo e saiba o seu resultado, e que, 2 horas depois, com a notícia se espalhando, 10% da população já saiba o resultado da partida.
a) Determine uma função que diga a porcentagem da população que sabe o resultado da partida em função do tempo.
b) Quanto tempo levará para que metade da população saiba o resultado da partida?

c) Quanto tempo levará para que 99% da população saiba o resultado da partida?

EDOPO Homogêneas

42) Defina função homogênea, e grau de homogeneidade.

43) Verifique se as funções a seguir são homogêneas ou não, e, caso sejam, determine o grau de homogeneidade das funções:

a) $F(x;y) = x + 3y$

b) $F(x;y) = \frac{xy}{x+y}$

c) $F(x;y) = \frac{x+y^2}{x-y}$

d) $F(x;y) = \frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

e) $F(x;y) = \cos(xy)$

Errata da aula do dia 02/10: Uma EDOPO Homogênea só pode ser resolvida através da substituição $\frac{y}{x} = v \Leftrightarrow y = vx$, se, e só se a EDOPO for da forma $y' = F(x;y)$, onde a função $F(x;y)$ for homogênea de grau zero.

44) Suponha que $F(x;y)$ é uma função homogênea de grau zero, ou seja $F(\lambda x; \lambda y) = F(x;y), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Demonstre que, com a mudança de variável $\frac{y}{x} = v \Leftrightarrow y = vx$, é possível se transformar a EDOPO $y' = F(x;y)$ em uma EDOPO separável na variável v.

45) Para cada uma das EDO's a seguir, mostre que elas são homogêneas, e resolva-as. (OBS: Em geral, as integrais na variável v são integrais complicadas. Resolva essas integrais com software).

a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

b) $y' = \frac{4x}{x+3y}$

c) $y' = \frac{2x-3y}{x+4y}$

d) $y' = \frac{(x^2+y^2)}{xy}$

e) $y' = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$

f) $y' = \frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ → Desenvolva esse item até ela virar separável, mas não resolva!

EDOPO Exatas

46) Defina EDOPO exata.

47) Demonstre que, se uma EDOPO é da forma $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$, então, para a existência de uma função da forma $F(x;y)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = P; \frac{\partial F}{\partial y} = Q$, então é uma condição necessária que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

48) Para cada uma das EDOPO a seguir, verifique se ela é exata ou não. Caso seja, resolva essa EDO.

a) $(3x^2 + 2y)dx + (2x)dy = 0$

b) $(2y^2)dx + (4xy + 2y)dy = 0$

c) $(16xy + 8x)dx + (8x^2 - 6y^2)dy = 0$

d) $(2x^5y + 3x^4y^2)dx + (3x^4y^2 + 2x^3y^3)dy = 0$

e) $\left((x+1)e^{x+2y} - ye^x\right)dx + (2xe^{x+2y} - e^x) = 0$

f) $((sen(xy) + xycos(xy) - \cos(x))dx + \left(x^2\cos(xy) - sen(y)\right)dy = 0$

g) $(-3x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy = 0$

49) Considere uma EDOPO da forma $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$, na qual $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Suponha que existe uma função $\mu(x)$, dependendo apenas da variável x, tal que, ao multiplicarmos a equação original por $\mu(x)$, então temos que a EDOPO $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ se torne exata.

a) Dê uma condição para que a equação $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ seja exata.
b) Desenvolva essa equação, e determine uma expressão para a função $\mu(x)$, caso ela exista.
c) Qual condição deve ser satisfeita para garantir a existência de $\mu(x)$?

50) Considere uma EDOPO da forma $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$, na qual $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Suponha que existe uma função $\mu(y)$, dependendo apenas da variável y, tal que, ao multiplicarmos a equação original por $\mu(y)$, então temos que a EDOPO $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ se torne exata.

a) Dê uma condição para que a equação $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ seja exata.
b) Desenvolva essa equação, e determine uma expressão para a função $\mu(y)$, caso ela exista.
c) Qual condição deve ser satisfeita para garantir a existência de $\mu(y)$?

51) Na questão de resolução de EDOPO Exatas, existem itens nos quais a EDO dada não é exata. Determine um fator integrante $\mu(x)$ ou $\mu(y)$, e resolva as EDOPO Exatas dadas, utilizando o fator integrante.

52) Considere um campo vetorial dado por $\big(P(x;y); Q(x;y)\big)$. O que a EDOPO $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ calcula, em termos geométricos?

53)

a) Utilizando software gráfico, faça um esboço do campo vetorial dado por $(-2x; 1)$.
b) Resolva a EDOPO $(-2x)dx + dy = 0$
c) Ainda utilizando software gráfico, esboce algumas das soluções dessa EDO. Analise o ocorrido.

54) As linhas de campo elétrico em uma região são dadas pela função vetorial $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

a) Determine uma função de potencial elétrico para esse campo.
b) Determine a curva equipotencial do campo que passa pelo ponto $(1;1)$

55) Imagine que uma certa região marítima tenha a correnteza dada pelo campo vetorial $(3x^2y - 2x; x^3 - 2y)$. Determine a equação do caminho que, a partir do ponto $(1;0)$, sofre a menor ação da correnteza em módulo (ou seja, é um caminho que não é nem a favor, nem contrário a correnteza).