Séries e Equações Diferenciais

Lista 01 - Sequências

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições Iniciais

1) Defina com suas palavras o conceito de sequência numérica.

2) Imagine uma lista de números dada por todos os números de telefones celulares de todas as pessoas do país, listados por ordem alfabética. Essa lista é uma sequência? Justifique.

3) As sequências a seguir são dadas por uma listagem de seus primeiros termos. Em cada item, tente escrever uma lei de formação para os termos da sequência dada:

a) $(a_n) = (1; 2; 3; 4; 5; 6 \ldots)$
b) $(a_n) = (-2; 4;\ -8; 16;\ -32; 64 \ldots)$
c) $(a_n) = \left(300;\ \sqrt{300};\ \sqrt[3]{300};\ \sqrt[4]{300};\ \sqrt[5]{300};\ \sqrt[6]{300} \ldots\right)$
d) $(a_n) = \left(\frac{3}{5}; \frac{8}{6}; \frac{13}{7}; \frac{18}{8}; \frac{23}{9}; \frac{28}{10}; \ldots\right)$
e) $(a_n) = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{11}{8}; \frac{15}{16}; \frac{19}{32}; \frac{23}{64}; \ldots\right)$
f) $(a_n) = (1; 1;\ -1;\ -1; 1; 1;\ -1; -1; \ldots)$

4) As sequências a seguir são dadas por fórmulas recursivas. Em cada item, escreva os primeiros seis termos dessa sequência, e tente determinar uma lei de formação para seus termos gerais:

a) $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + 5, & se\ n \neq 1 \end{cases}$
b) $(a_n) = \begin{cases} 45, & se\ n = 1 \\ \frac{a_{n-1}}{3}, & se\ n \neq 1 \end{cases}$
c) $(a_n) = \begin{cases} 3, & se\ n = 1 \\ (a_{n-1})^2, & se\ n \neq 1 \end{cases}$
d) $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}, & se\ n \neq 1 \end{cases}$
e) $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ a_{n-1} + (2n-1), & se\ n \neq 1 \end{cases}$

5) Justifique porque o gráfico da sequência $(a_n) = \frac{3n}{n^2+1}$ não é igual ao gráfico da função $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

Definição Formal de Limites

6) Defina com suas palavras o conceito de limite de sequência numérica.

7) Defina formalmente (utilizando ε) o conceito de limite de sequência numérica, e interprete esse conceito graficamente.

8) Demonstre, através da definição formal, que a sequência dada convergirá para o valor dado:

a) $(a_n) = \frac{1}{n^2} \qquad L = 0$
b) $(a_n) = \frac{2n-3}{n+4} \qquad L = 2$
c) $(a_n) = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad L = 1$

9) Demonstre, através da definição formal, que a sequência $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n\ \text{é}\ par \\ 0, & se\ n\ \text{é}\ ímpar \end{cases}$ diverge.

10) Demonstre, através da definição formal, que a sequência $(a_n) = \begin{cases} \alpha, & se\ n\ \text{é}\ par \\ \beta, & se\ n\ \text{é}\ \text{í}mpar \end{cases}$ diverge se $\alpha \neq \beta$, e converge para α, se $\alpha = \beta$. (DICA: Para a parte de divergência, tome $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{3}$)

11) Na sequência $(a_n) = (-1)^n$, se tomarmos $\varepsilon = 4$, é possível provar que $|a_n - 1| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$, o que pode induzir a ideia de que a sequência converge para 1. Ainda assim, a sequência diverge. Justifique o ocorrido.

Cálculos de Limites

12) Verifique se as sequências a seguir convergem ou divergem. Caso convirjam, calcule o valor para o qual a sequência converge:

a) $(a_n) = \frac{1}{n}$
b) $(a_n) = n$
c) $(a_n) = \frac{3n+2}{1-4n}$
d) $(a_n) = \frac{n^2+4n-3}{1+2n+3n^2}$
e) $(a_n) = \frac{n^3}{2n^2+4}$
f) $(a_n) = \frac{n^2}{2n^3+4}$
g) $(a_n) = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
h) $(a_n) = \frac{\sqrt[3]{2-n+n^2}}{3n}$
i) $(a_n) = \frac{\sqrt{6n^4+4n^6}}{\sqrt[3]{1+n^3+n^6}}$
j) $(a_n) = \frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+2}}$
k) $(a_n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
l) $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n\ \text{é}\ pot\hat{e}ncia\ de\ 10 \\ 0, & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$
m) $(a_n) = \int_1^n \frac{1}{t}\, dt$
n) $(a_n) = \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$
o) $(a_n) = tg\left(\frac{n\pi}{4n+2}\right)$
p) $(a_n) = arctg(n)$
q) $(a_n) = \frac{\ln(n)}{n}$
r) $(a_n) = \frac{n \cdot ln(n)}{n^2+9}$
s) $(a_n) = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
t) $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
u) $(a_n) = \left(\frac{n-3}{n+4}\right)^n$
v) $(a_n) = \left(1 - tg\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
w) $(a_n) = \sqrt[n]{n}$
x) $(a_n) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^2}$

13) Para cada uma das sequências do exercício anterior, verifique se a sequência é crescente, decrescente ou nenhuma delas, e se a sequência é limitada ou não.

14) Sabe-se que se (a_n) é uma sequência numérica, e $f(x)$ é uma função tal que $f(n) = a_n$, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. A afirmação contrária é verdadeira? Justifique.

Teoremas Envolvendo Sequências

15) Defina sequência crescente e sequência decrescente.

16) Dê um exemplo de uma sequência que não é nem crescente nem decrescente, mas converge.

17) Dê um exemplo de uma sequência que não é nem crescente nem decrescente, mas diverge.

18) Dê um exemplo de sequência crescente e convergente.

19) Dê um exemplo de sequência crescente e divergente.

20) Defina sequência limitada.

21) Dê um exemplo de uma sequência limitada convergente.

22) Dê um exemplo de uma sequência limitada divergente.

23) Considere a sequência recursiva dada por $(a_n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}, & se\ n \neq 1 \end{cases}$.

a) Prove que essa sequência é crescente e limitada.
b) Determine o valor para o qual essa sequência converge.

24) Considere a sequência $(a_n) = \frac{n}{n+1}$.

a) Prove que essa sequência é limitada superiormente por 4.
b) Essa sequência converge para 1. Isso contradiz a teoria? Justifique.

25) Seja (a_n) uma sequência convergente. Seja (b_n) uma sequência definida pela lei de formação $(b_n) = \begin{cases} n!, & se\ n \leq p \\ a_{n-p}, & se\ n > p \end{cases}$, para algum valor $p \in \mathbb{N}$ fixo. Prove ou argumente o porquê (b_n) converge.