Métodos Numéricos 2

Lista 02 – Sistemas não-lineares, Otimização, Interpolação e MMQ

Professor: Daniel Henrique Silva

1) Dê um exemplo de um sistema não-linear de duas variáveis, e interprete o seu resultado graficamente.

2) Descreva a ideia que o método de Newton para sistemas não-lineares utiliza para resolver sistemas não-lineares, incluindo o seu critério de parada.

3) Considere uma função $f(x;y)$ de duas variáveis. Descreva como o método dos gradientes faz para procurar um ponto de máximo para essa função.

4) Descreva com suas palavras o algoritmo do método dos gradientes para determinar pontos de máximo para uma função de várias variáveis.

5) Como adaptar o método dos gradientes para que ele determine um ponto de mínimo?

6) O que interpolação polinomial? E polinômio interpolador? Dê um exemplo de uma situação prática na qual a interpolação pode ser útil.

7) Enuncie o teorema de existência e unicidade do polinômio interpolador.

8) Explique algébrica e geometricamente a razão pela qual a condição $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ é importante para garantir a existência do polinômio interpolador.

9) Compare o método de Lagrange com o método de Newton para interpolação polinomial, mencionando ao menos uma vantagem e uma desvantagem de um deles sobre o outro.

10) Compare o método de Newton com o método de Newton-Gregory para interpolação polinomial, mencionando ao menos uma vantagem e uma desvantagem de um deles sobre o outro.

11) O que é o “fenômeno de Runge”? Em que situações ele ocorre?

12) Qual a diferença entre interpolação polinomial e o método dos mínimos quadrados, em relação ao objetivo de cada um deles?

13) Descreva como funciona o método dos mínimos quadrados para o caso polinomial.

14) Descreva como funciona o método dos mínimos quadrados para o caso não-polinomial.

15) Descreva como funciona o método dos mínimos quadrados para o caso contínuo.

16) Descreva como ajustar o método dos mínimos quadrados para aproximar um conjunto de dados para uma função da forma $y = a \cdot e^{bx}$

17) Descreva como ajustar o método dos mínimos quadrados para aproximar um conjunto de dados para uma função da forma $y = a \cdot b^{x}$

18) Descreva como ajustar o método dos mínimos quadrados para aproximar um conjunto de dados para uma função da forma $y = \frac{1}{a+bx}$

19) Descreva como ajustar o método dos mínimos quadrados para aproximar um conjunto de dados para uma função da forma $y = \frac{x}{a + bx}$

20) Suponha que desejamos aproximar uma função $f(x)$ por uma parábola, no intervalo $[a; b]$. Podemos utilizar o método dos mínimos quadrados discreto, chutando pontos no intervalo, ou podemos utilizar o método dos mínimos quadrados contínuo. Mencione vantagens e desvantagens de cada uma das duas abordagens.

21) O que acontece se utilizarmos MMQ polinomial de grau 3 para aproximar uma amostra de 4 pontos?

22) Considere o sistema não-linear dado por $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = -y^2 + 3y + 3 \end{cases}$

a) Faça um esboço das equações do sistema, e estime um chute inicial para determinar a raiz que se encontra no segundo quadrante.

b) Verifique, através da matriz jacobiana, se esse chute inicial irá fornecer um sistema possível e determinado ao se aplicar o método de Newton para sistemas não-lineares.

c) Partindo desse ponto inicial, faça duas iterações do método de Newton, e veja qual o erro cometido em cada iteração.

d) Compare o resultado com o valor exato, que é $\bar{x} = -2.890173; \bar{y} = 4.353099$

23) Considere o problema de otimização dado por $Max\ f(x; y) = 3x - 4y^2$, sujeito à restrição $g(x; y): x^2 + y^2 = 10$.

a) **Monte** (mas não se preocupe em resolver) o sistema dado pelos multiplicadores de Lagrange que determine os pontos de máximo dessa equação.

b) **Monte** (mas não se preocupe em resolver) o método iterativo de Newton para sistemas não-lineares para resolver esse sistema.

c) Faça uma iteração do método de Newton para esse sistema, partindo do ponto inicial $(2; 2)$. Analise se ele tende para o ótimo, que é $\bar{x} = 3.162278; \bar{y} = 0$

24) Determine o polinômio interpolador pelos pontos $(-3; 5); (-1; 2); (1; 0); (3; -3)$…

a) …através do método de Lagrange

b) …através do método de Newton

c) …através do método de Newton-Gregory

25) Pelo método de sua preferência, determine o polinômio interpolador pelos pontos $(-2; 1); (-1; 0); (0; 0); (1; 1); (2; 0)$.

26) Determine a reta que melhor aproxima os pontos $(0; 4); (1; 6); (2; 6); (3; 7); (5; 8); (6; 10); (7; 12); (8; 12)$

27) Determine a parábola que melhor aproxima os pontos do item anterior.

28) Considere os pontos dados por $(1; 18); (2; 14); (3; 11); (4; 9); (5; 8); (6; 7); (7; 7)$

a) Esboce esses pontos num gráfico.

b) Aproxime esses pontos por uma função do tipo $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$

c) Aproxime esses pontos por uma função do tipo $y = a_0 + a_1 \sqrt[3]{x}$

d) Calcule o erro cometido por cada tipo de aproximação, e determine a mais precisa.

e) Proponha (mas não se preocupe em resolver) alguma função que aproxime melhor do que as anteriores.

29) Determine a reta que melhor aproxima a função $y = \sqrt{x}$, para $x \in [16, 25]$, usando MMQ contínuo, e utilize essa reta para estimar $\sqrt{22}$. Compare o valor obtido com o valor exato.

30) Determine a parábola que melhor aproxima a função $y = e^x$ no intervalo $[0; 1]$. Utilize essa parábola para estimar o valor de $\sqrt[3]{e}$, e compare com o valor exato.

Dados: $\int xe^x dx = xe^x - x + C; \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$