Métodos Numéricos 2

Lista 01 – Zeros de Funções Reais

Professor: Daniel Henrique Silva

1) Defina erro de modelagem, e dê um exemplo prático.

2) Defina erro de arredondamento, e dê um exemplo numérico.

3) Defina erro de transição binária, e dê um exemplo numérico que não seja o mesmo dado em sala.

4) Baseado em um exemplo numérico, explique o porquê de erros de transição binária serem inevitáveis em programação numérica.

5) Defina erro de underflow, dando um exemplo numérico.

6) Defina erro de overflow, dando um exemplo numérico.

7) Suponha que, ao aproximar o valor de $\sqrt{2}$, (cujas primeiras dez casas são 1.414213562), um método encontrou o valor aproximado de $x_{ap} = 1.444444444$.

a) Determine o erro absoluto cometido na aproximação.
b) Determine o erro relativo cometido na aproximação.

8) Explique com suas palavras o que significa "determinar um zero de uma função".

9) Como a teoria utilizada para determinar raízes de funções do tipo $f(x) = 0$ pode ser utilizada para determinar soluções de equações da forma $g(x) = h(x)$?

10) Enuncie (mas não demonstre) o teorema de Bolzano, e diga como ele pode ser utilizado para ajudar a determinar zeros de funções numericamente.

11) Escreva um pseudo-código para todos os métodos para determinar zeros de função (bissecção, aproximações sucessivas, Newton e Secantes).

12) Compare todos os métodos aprendidos em sala sobre determinar zeros de funções, mencionando vantagens e desvantagens de cada um deles sobre os demais.

13) Deduza o número mínimo de iterações necessárias no método da Bissecção para determinar uma raiz da função $f(x)$, com margem de erro absoluto em relação ao eixo x de ε_x, em função dos pontos iniciais do intervalo $[a; b]$ e da margem de erro.

14) Demonstre que uma condição equivalente para a convergência do método de Newton dado em sala $\left|\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)'\right| < 1$, pode ser dada por $\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1$.

15) Seja a função polinomial dada por $f(x) = -1.2x^3 - 1.6868x^2 + 14.4321x - 7.2533$

a) Utilizando algum software gráfico, faça um esboço do gráfico dessa função no intervalo $[-5; 5]$
b) Demonstre que essa função irá possuir três raízes reais distintas, e determine intervalos $I_1; I_2; I_3$ tais que cada intervalo contenha apenas uma única raiz da função.
c) Caso você aplique o método da bissecção no intervalo $[-5; 5]$, para qual das raízes o método irá convergir?
d) Quantas iterações são necessárias para que o método da bissecção convirja, a partir do intervalo $[-5; 5]$, com margem de erro absoluto em x de $\varepsilon < 10^{-4}$?
e) Determine qualquer uma das raízes, com margem de erro $\varepsilon < 10^{-2}$, pelo método que julgar mais conveniente.

16) Seja a função $f(x) = 2x^2 - 5x - 17$

a) Demonstre que essa função possui duas raízes reais distintas, sendo uma positiva e uma negativa.
b) Construa ao menos cinco diferentes funções $\varphi(x)$ que possam ser utilizadas no método das aproximações sucessivas. (Não se preocupe em demonstrar se essas funções convergem ou não)
c) Determine um intervalo para o qual a função de iteração $\varphi(x) = \frac{\sqrt{5x + 17}}{2}$ irá convergir para a raiz positiva da função dada.

d) Utilizando a função de iteração do item anterior, aplique o método das aproximações sucessivas, e determine a raiz com erro $\varepsilon < 10^{-3}$

17) Dada a função $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x - 2$

a) Demonstre que essa função possui uma raiz no intervalo $[1; 2]$.

b) Mostre (utilizando software gráfico), que o método de Newton tem convergência garantida no intervalo $[1; 2]$.

c) Calcule a raiz desse problema pelo método de Newton com erro absoluto $\varepsilon < 10^{-5}$.

d) O método das secantes irá convergir para esse problema? Justifique.

e) Calcule a raiz desse problema pelo método das secantes com erro absoluto $\varepsilon < 10^{-5}$.

18) Considere a função $f(x) = x^2$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ é equivalente à $x = \frac{x}{x+1}$, se $x \neq -1$.

b) Mostre que, utilizando $\varphi(x) = \frac{x}{x+1}$, o método das aproximações sucessivas converge para a raiz de $f(x)$, mesmo ela sendo uma raiz dupla.

c) Algum dos outros métodos pode convergir para a solução dessa equação?

19) Considere a função $f(x) = x^2 - 2^x$.

a) Demonstre que essa função possui ao menos uma raiz negativa, e determine um intervalo de amplitude 1 no qual essa raiz esteja contida.

b) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método da Bissecção.

c) Determine uma função $\varphi(x)$ tal que o método das aproximações sucessivas converge no mesmo intervalo.

d) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método das aproximações sucessivas.

e) O método de Newton converge para essa função no intervalo? Justifique.

f) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método de Newton.

g) O método das secantes converge para essa função no intervalo? Justifique.

h) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método das secantes.