Métodos de Matemática Aplicada

Professor: Daniel Henrique Silva

Funções periódicas

1) Seja $f(x)$ uma função 2L-periódica. Qual o período das funções:
   a) $f(x)+A$, onde $A \in \mathbb{R}^*$
   b) $f(Ax)$, onde $A \in \mathbb{R}^*$
   c) $Af(x)$, onde $A \in \mathbb{R}^*$
   d) $f(x+A)$, onde $A \in \mathbb{R}^*$
   e) $f\left(\frac{x}{A}\right)$, onde $A \in \mathbb{R}^*$

2) Mostre que se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ambas 2L-periódicas, então $(f+g)(x)$ também será 2L-periódica.

3) Argumente geometricamente o porquê se uma função é 2L-periódica, então $\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{2L} f(x)\,dx$

4) Analise se isso é verdade para a igualdade $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L+a}^{L+a} f(x)\,dx$

5) Demonstre as relações trigonométricas:
   a) $sen(a)\cos(b) = \frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{2}$
   b) $sen(a)sen(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
   c) $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$

6) Demonstre que $\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

7) Demonstre que $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

8) Demonstre que $\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$.

9) Demonstre que $\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m \\ L, & se\ n = m \end{cases}$

10) Demonstre que $\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m \\ L, & se\ n = m \end{cases}$

Séries de Fourier

11) Para cada uma das funções a seguir, faça um esboço da função em um intervalo de pelo menos três períodos, e determine a série de Fourier de cada uma delas.

a) $f(x) = \begin{cases} -x, & se\ x \in [-\pi; 0[\\ x, & se\ x \in [0; \pi[\\ f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & se\ x \in [-1; 0[\\ 1, & se\ x \in [0; 1[\\ f(x+2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in [-2; 0[\\ x^2, & se\ x \in [0; 2[\\ f(x+4) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Funções pares e ímpares

12) Dê um exemplo de uma função que não é nem par, nem ímpar.

13) Demonstre que a soma de duas funções pares também é uma função par.

14) Demonstre que a soma de duas funções ímpares também é uma função ímpar.

15) Demonstre que o produto de duas funções pares também é uma função par.

16) Demonstre que o produto de uma função par e de uma função ímpar é uma função ímpar.

17) Demonstre que o produto de duas funções ímpares é uma função par.

18) Demonstre que a derivada de uma função par é uma função ímpar.

19) Para cada uma das funções não-periódicas dadas a seguir, determine uma extensão par e uma expansão ímpar para cada função, e calcule a série de Fourier correspondente a cada uma delas.

a) $f: [0; \pi[, f(x) = 1$

b) $f: [0; \pi[, f(x) = x$

c) $f: [0; \pi[, f(x) = 1 - x$

d) $f: [0; \pi[, f(x) = \begin{cases} \cos(x), & se\ x \in [0; \frac{\pi}{2}[\\ 0, & se\ x \in [-\frac{\pi}{2}; 0[\end{cases}$

Teorema da convergência

20) Para cada uma das funções da questão anterior (tanto extensão par quanto impar), diga para quais valores a série de Fourier converge no intervalo $[-L; L]$.

21) Seja $f: [0; L]$ uma função real qualquer. Em geral, qual das extensões (par ou ímpar) terá uma convergência mais rápida? Justifique.

22) Considere a função $f: [0; \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = 1$

a) Crie uma extensão ímpar para essa função.

b) Determine a série de Fourier para essa extensão.

c) Utilize o resultado do item anterior para deduzir o valor de $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

23) Considere a função $f: [0; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x$

a) Crie uma extensão ímpar para essa função.

b) Determine a série de Fourier para essa extensão.

c) Utilize o resultado do item anterior para deduzir o valor de $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Gabarito

1)

a) $2L$

b) $\frac{2L}{A}$

c) $2L$

d) $2L$, embora sua fase inicial se altere

e) $2AL$

2) Como as funções são 2L-periódicas, então $f(x) = f(x + 2L)$ e $g(x) = g(x + 2L)$. Para a função soma, temos $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x + 2L) + g(x + 2L) = (f + g)(x + 2L)$. O que encerra a demonstração.

3) Analisando as áreas dos gráficos (lembrando que se f(x) é periódica, seu gráfico, e por consequência, a sua área também serão periódicos), é possível ver que as integrais representam a mesma área, transladada de um intervalo L.

4) Análogo à anterior, mas a translação é de a unidades.

5)

a) Basta somar as relações $\begin{cases} sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + sen(b)\cos(a) \\ sen(a-b) = sen(a)\cos(b) - sen(b)\cos(a) \end{cases}$, e isolar o termo $sen(a)\cos(b)$

b) Basta subtrair as relações $\begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b) \end{cases}$, e isolar o termo $sen(a)sen(b)$

c) Basta somar as relações $\begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + sen(a)sen(b) \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - sen(a)sen(b) \end{cases}$, e isolar o termo $\cos(a)\cos(b)$

6) $\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\left[\frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\frac{n\pi}{L}}\right]_{x=-L}^{L} = -\left[\frac{(-1)^n}{\frac{n\pi}{L}} - \frac{(-1)^n}{\frac{n\pi}{L}}\right] = 0$

7) Análoga a anterior.

8) Lembrando da relação $sen(a)\cos(b) = \frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{2}$, então, se $n \neq m$: $\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$

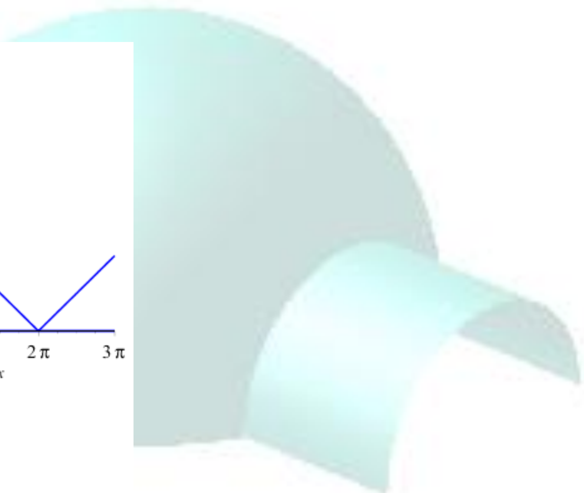
$$\int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left(sen\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) + sen\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)\right) dx = \frac{L}{2\pi}\left[\left(-\frac{\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)}{n+m} + \frac{\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right)}{n-m}\right)\right]_{x=-L}^{L} = \cdots = 0$$

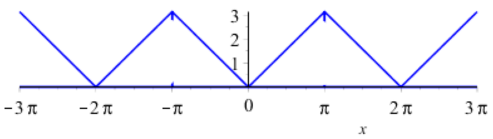
Se $n = m$, então $sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2}$, cuja integral é nula, pelo exercício 6.

9) Análogo ao anterior.

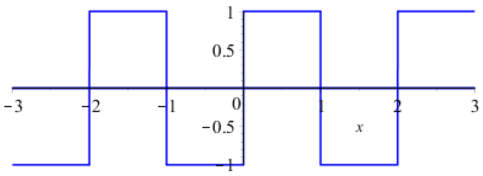
10) Análogo aos dois anteriores.

11)

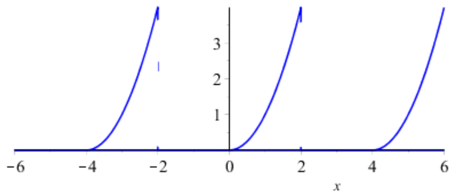




a) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2}\cos(nx)$



b) $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-2(-1)^n + 2}{n\pi}\right) sen(n\pi x)$



c) $$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{8(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{(-4)(-1)^n}{n\pi} + \frac{8(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{8}{n^3\pi^3}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$$

12) Questão aberta.

13) Sejam $f(x), g(x)$ pares. Então $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Para a função soma, temos: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$, logo a função $(f+g)(x)$ é par.

14) Análoga a anterior.

15) Sejam $f(x), g(x)$ pares. Então $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = g(-x)$. Para a função produto, temos: $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(-x) \cdot g(-x) = (fg)(-x)$, logo a função $(fg)(x)$ é par.

16) Análogo a anterior

17) Análogo a anterior

18) Seja $f(x)$ uma função par, então $f(x) = f(-x)$. Derivando dos dois lados da expressão, temos $\left(f(x)\right)' = \left(f(-x)\right)' \Rightarrow f'(x) = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x)$. Como $f'(-x) = -f'(x)$, então a função $f'(x)$ é ímpar.

19)

a) $f_p(x) = 1$ $f_p(x) = 1$

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0;\pi[\\ -1, & se\ x \in [-\pi;0[\\ f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2-2(-1)^n}{n\pi}\right) sen(nx)$$

b) $$f_p(x) = \begin{cases} x, & se\ x \in [0;1[\\ -x, & se\ x \in [-1;0[\\ f(x+2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , f_p(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2}\right)\cos(nx)$$

$$f_i(x) = \begin{cases} x, & se\ x \in [-1;1[\\ f(x+2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right) sen(nx)$$

c) $$f_p(x) = \begin{cases} 1-x, & se\ x \in [0;1[\\ 1+x, & se\ x \in [-1;0[\\ f(x+2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , f_p(x) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2(-1)^n}{\pi n^2} + \frac{2}{\pi n^2}\right)\cos(nx)\right)$$

$$f_i(x) = \begin{cases} 1-x, & se\ x \in [0;1[\\ -1-x, & se\ x \in [-1;0[\\ f(x+2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(2\pi-1)(-1)^n}{\pi n} + \frac{2}{\pi n}\right) sen(nx)$$

d) $$f_p(x) = \begin{cases} \cos(x), & se\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ 0, & se\ x \in [-\pi;-\frac{\pi}{2}[\\ 0, & se\ x \in [\frac{\pi}{2};\pi[\\ f(x+2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , \quad f_p(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{sen\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{\pi(n-1)} + \frac{sen\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\pi(n+1)}\right)\cos(nx)$$

$$f_i(x) = \begin{cases} \cos(x)\,, & se\ x \in [0; \frac{\pi}{2}[\\ -\cos(x)\,, & se\ x \in [-\frac{\pi}{2}; 0[\\ 0, & se\ x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}[\\ 0, & se\ x \in [\frac{\pi}{2}; \pi[\\ f(x+2\pi) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad , \quad f_i(x) = \sum_{i=2}^{\infty} \left(\left(\frac{2n}{\pi(n^2-1)} - \frac{\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{\pi(n-1)} - \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\pi(n+1)} \right) \cos(n\pi x) \right)$$

20)

a) A extensão par converge para 1, para todo $x \in [-\pi; \pi]$, e a extensão ímpar converge para $\begin{cases} 1, & se\ x \in]0; \pi[\\ -1, & se\ x \in]-\pi; 0[\\ 0, & se\ x = 0; \pi\ ou -\pi \end{cases}$

b) A extensão par converge para $\begin{cases} x, & se\ x \in [0; \pi] \\ -x, & se\ x \in [-\pi; 0] \end{cases}$, e a extensão impar converge para $\begin{cases} x, & se\ x \in]-\pi; \pi[\\ 0, & se\ x = \pi\ ou -\pi \end{cases}$

c) A extensão par converge para $\begin{cases} 1-x, & se\ x \in [0; \pi] \\ 1+x, & se\ x \in [-\pi; 0[\end{cases}$, e a extensão impar converge para $\begin{cases} 1-x, & se\ x \in]0; \pi] \\ -1+x, & se\ x \in [-\pi; 0[\\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$

d) A extensão par converge para $\begin{cases} \cos(x)\,, & se\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & se\ x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]\ ou\ \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$ e a extensão ímpar converge para $\begin{cases} \cos(x)\,, & se\ x \in]0; \pi/2[\\ -\cos(x)\,, & se\ x \in]-\pi/2; 0[\\ 0, & se\ x = 0\ ou\ se\ x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]\ ou\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$

21) Em um caso geral, a extensão par converge mais rápido, pois seu gráfico é contínuo nos extremos.

22)

a) $f_i = \begin{cases} 1, & se\ x \in [0; \pi[\\ -1, & se\ x \in [-\pi; 0[\\ f(x+2\pi) = f(x), \forall x \ \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2-2(-1)^n}{n\pi} \mathrm{sen(nx)}$

c) Substituindo x por $\frac{1}{2}$, e utilizando o teorema da convergência, chega-se em $\frac{\pi}{4}$ para o valor do somatório.

23)

a) $f_p(x) = \begin{cases} x, & se\ x \in [0; 1[\\ -x, & se\ x \in [-1; 0[\\ f(x+2) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n - 2}{n^2\pi^2} \right) \cos(n\pi x)$

c) Substituindo x por 0 e aplicando o teorema da convergência, chega-se em $\frac{\pi^2}{8}$ para o valor do somatório.