Métodos de Matemática Aplicada

Professor: Daniel Henrique Silva

Função de Heaviside

1) Demonstre que $\mathcal{L}[\mu_c(t)] = \frac{e^{-cs}}{s}$

2) Demonstre que, se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, então $\mathcal{L}[f(t-c)\mu_c(t)] = e^{-cs}F(s)$, onde $f(t)$ é definida para $t \geq -c$.

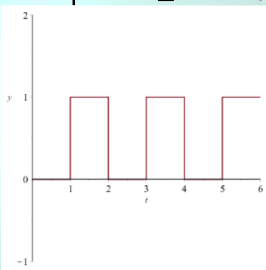
3) Modele, utilizando a função de Heaviside, as funções:

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq t < 4 \\ 3, & se\ 4 \leq t < 6 \\ 1, & se\ 6 \leq t < 12 \\ 0, & se\ t \geq 12 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} t^2, & se\ 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & se\ 1 \leq t < 2 \\ 0, & se\ t \geq 2 \end{cases}$

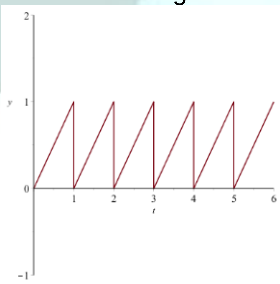
c) $f(t) = \begin{cases} t, & se\ 0 \leq t < 1 \\ t^2, & se\ 1 \leq t < 2 \\ t^3, & se\ 2 \leq t < 3 \\ 1, & set \geq 3 \end{cases}$

d) A função "onda quadrada", que vale 0 para $n \leq t < n+1$, quando n é par, e 1 para $n \leq t < n+1$ quando n é impar ($n \in \mathbb{N}$), cujo gráfico é dado por:



(OBS: Note que o gráfico é infinito.)

e) A função "onda dente de serra", dada pela união dos segmentos de reta que ligam os pontos da forma $(n;0)$ à $(n+1;1)$, onde $n \in \mathbb{N}$, cujo gráfico é dado por:



(OBS: Note que o gráfico é infinito.)

4) Para cada item da questão anterior, determine a transformada de Laplace da função.

5) Calcule a transformada inversa de:

a) $\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^3}$

b) $\frac{3}{s^2+9} + \frac{3e^{-s\pi}}{s^2+9}$

c) $\frac{2e^{-s}}{s^3} + \frac{(s-4)e^{-4s}}{(s^2+4)^2}$

d) $\frac{e^{-se}(s+1)}{s^2+2s+5}$

Função delta de Dirac

6) Escreva a função delta de Dirac em função da função de Heaviside. (OBS: Apesar da palavra "função" aparecer várias vezes no enunciado, a questão faz sentido!)

7) Calcule a transformada de Laplace da função delta de Dirac

8) Considere um dispositivo mecânico que fornece pulsos de força a cada um segundo, começando em $t = 0$.

a) Caso esses pulsos sejam todos no mesmo sentido, modele, em função da função delta de Dirac, uma função que descreva o comportamento desse dispositivo.

b) Calcule a transformada de Laplace dessa função.

c) Admita agora que os pulsos sejam alternados em direções opostas. Modele a função para essa situação.

d) Calcule a transformada de Laplace para esse caso.

Produto de convolução

9) Sejam $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ três funções reais, cujo domínio é $\mathbb{R}^+$. Demonstre que:

a) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

b) $f(t) * \left(g(t) + h(t)\right) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$

10) Dê um exemplo de uma função cujo produto de convolução $f(t) * 1 \neq f(t)$

11) Use produto de convolução para deduzir, em função da constante a, a transformada inversa de:

a) $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$

b) $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$

c) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$

Aplicações em circuitos elétricos

12) Considere um circuito elétrico tipo RLC (resistor-indutor-capacitor), com resistência R, indutância L, e capacitância C, todos ideais, ligados a uma fonte de tensão que fornece tensão variável em função do tempo, U(t). Assuma que a carga inicial do capacitor seja conhecida e valha Q_0, e que a corrente inicial no circuito valha I_0. Escreva um problema de valor inicial que modela fisicamente a carga $y(t)$ em função do tempo. (Assuma que os dados estão todos no SI, e não é necessária nenhuma conversão de unidades)

13) Na situação do problema anterior, assuma que o capacitor inicie o problema com carga nula. Modele uma equação integro-diferencial que calcule a corrente em função do tempo.

14) Um circuito RLC possui um resistor de resistência 0.15Ω, um indutor de indutância 1H, e um capacitor de capacitância 200F. O circuito, inicialmente sem corrente, é alimentado por uma bateria que fornece tensão constante durante o período entre 2s à 4s.

a) Determine um modelo de equação integro-diferencial que determine a corrente do circuito elétrico.

b) Determine a corrente em função do tempo.

c) Utilizando algum software gráfico, esboce o gráfico dessa corrente em função do tempo.

d) O que acontece com a corrente após um tempo muito grande?

e) Dê uma estimativa através do gráfico sobre em que momento a corrente é máxima.

Miscelânea de exercícios

15) Considere um sistema massa-mola, com uma massa de 1Kg, e uma mola de constante elástica igual a 1N/m, no qual a cada π segundos, um impulso unitário é dado ao sistema, durante 2π segundos, sempre no mesmo sentido. O sistema parte do ponto de equilíbrio da mola e do repouso. Determine:

a) Um PVI que modele a posição do corpo em função do tempo.

b) A equação que descreve a posição da massa em função do tempo, bem como seu gráfico.

c) Caso o impulso, dado no mesmo padrão, fosse dado durante um tempo muito grande, como seria o movimento dessa partícula?

16) Refaça a questão anterior, supondo agora que os pulsos são dados em sentidos alternados, a cada π segundos.

17) Considere o problema dado por $\begin{cases} y' + y + \frac{1}{2}\int_0^t y(\tau)d\tau = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $f(t) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -4\cos(t), & se\ \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & se\ t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

a) Interprete esse problema como um problema de circuito RLC.

b) Resolva o problema.

c) Verifique o que acontece com esse sistema quando t tende ao infinito. Essa resposta faz sentido fisicamente?

Gabarito

1) $\int_0^{\infty} e^{-st}\mu_c(t)dt = \int_c^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-cs}}{-s}\right) = \frac{e^{-cs}}{s}$

2) Seja $\int_0^{\infty} e^{-st}\mu_c(t)f(t-c)dt$. Considere a mudança de variável $r = t - c \Rightarrow t = r + c \Rightarrow dt = dr$, onde se $t \to \infty, r \to \infty$. Então $\int_0^{\infty} e^{-st}\mu_c(t)f(t-c)dt = \int_{-c}^{\infty} e^{-s(r+c)}\mu_0(r)f(r)dr = e^{-sc}\int_{-c}^{\infty} e^{-sr}f(r)dr = e^{-sc}F(s)$. Note que essa integral só faz sentido pois $f(t)$ é definida para $t \geq -c$.

3) (OBS: As respostas aqui podem estar fatoradas de forma diferente. Existem formas diferentes de representar a mesma resposta correta)

a) $f(t) = 3\mu_4(t) - 2\mu_6(t) - \mu_{12}(t)$
b) $f(t) = t^2 + (2 - t - t^2)\mu_1(t) - (2-t)\mu_2(t)$
c) $f(t) = t + (t^2 - t)\mu_1(t) + (t^3 - t^2)\mu_2(t) + (1 - t^3)\mu_3(t)$
d) $f(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t) + \mu_3(t) - \mu_4(t) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\mu_i(t)$
e) $f(t) = t - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) + \mu_4(t) + \cdots) = t - \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(t)$

4)

a) $\frac{3e^{-4s} - 2e^{-6s} - e^{-12s}}{s}$
b) $\frac{se^{-2s} - 3se^{-s} - 2e^{-s} + 2}{s^3}$
c) $\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}(s+2)}{s^3} + \frac{e^{-2s}(2s+2)(2s^2+2s+3)}{s^4} - \frac{e^{-3s}(26s^3+27s^2+18s+6)}{s^4}$
d) $\frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s} + e^{-3s} - e^{-4s} + \cdots) = \frac{1}{s}\left(\frac{e^{-s}}{1+e^{-s}}\right)$
e) $\frac{1}{s^2} - \frac{(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + e^{-4s} + \ldots)}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\left(\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)$

5)

a) $\mu_1(t) + (t-2)\mu_2(t) + \frac{(t-3)^2}{2}\mu_3(t)$
b) $sen(3t) + sen\big(3(t-\pi)\big)\mu_\pi(t)$
c) $(t-1)^2\mu_1(t) + (t-4)\cos\big(2(t-4)\big)\,\mu_4(t)$
d) $e^{-(t-e)}\cos\big(2(t-e)\big)\,\mu_e(t)$

6) $\delta(t-t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)\right)$

7) $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \mathcal{L}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\mu_{t_0-\varepsilon}(t) - \mu_{t_0+\varepsilon}(t)\right)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{e^{(-t_0+\varepsilon)s}}{s} - \frac{e^{(-t_0-\varepsilon)s}}{s}\right) = \frac{1}{2s}e^{-t_0 s}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{\varepsilon s} - e^{-\varepsilon s}}{s}\right)\right)$ Aplicando-se a regra de L'Hôspital, vemos que o limite valerá $2s$, então $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-t_0 s}$.

8)

a) $f(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\delta(t-i)$
b) $\mathcal{L}[f(t)] = 1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + e^{-4s} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-s}}$
c) $f(t) = \delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2) - \delta(t-3) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\delta(t-i)$
d) $\mathcal{L}[f(t)] = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - \cdots = \frac{1}{1+e^{-s}}$

9)

a) $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.Seja $w = t - \tau \Rightarrow \tau = t - w \Rightarrow d\tau = -dw \Rightarrow$ Se $\tau = 0 \Rightarrow w = t; \tau = t \Rightarrow w = 0$. Com essa mudança de variável, temos $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_t^0 f(t-w)g(w)(-dw) = \int_0^t g(w)f(t-w)dw = g(t) * f(t)$.

b) $f(t) * \big(g(t) + h(t)\big) = \int_0^t f(\tau)\big(g(t-\tau) + h(t-\tau)\big)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$

10) Questão aberta.

11)

a) $\frac{sen(at)}{2a^3} - \frac{t\cos(at)}{2a^2}$

b) $\frac{tsen(at)}{2a}$

c) $\frac{sen(at)}{2a} + \frac{tcos(at)}{2}$

12) $\begin{cases} Ly'' + Ry' + \frac{y}{C} = U(t) \\ y(0) = Q_0 \\ y'(0) = I_0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} Ly' + Ry + \frac{1}{C}\int_0^t y(\tau)d\tau = U(t) \\ y(t) = I_0 \end{cases}$

14)

a) $\begin{cases} y' + 0.15y + \frac{1}{200}\int_0^t y(\tau)d\tau = 10\mu_2(t) - 10\mu_4(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b) $y(t) = 20\mu_2(t)\cdot\left(e^{\frac{1}{10}-\frac{t}{20}} - e^{\frac{1}{5}-\frac{t}{10}}\right) + 20\mu_4(t)\cdot\left(e^{\frac{2}{5}-\frac{t}{10}} - e^{\frac{1}{5}-\frac{t}{20}}\right)$

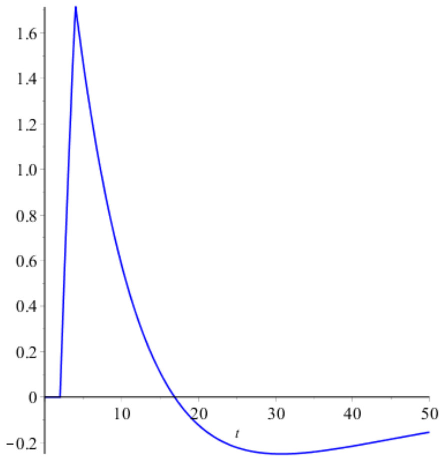
c) 

Gráfico gerado pelo software Maple

d) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Logo, a corrente tende a zero após um tempo suficientemente grande.

e) Graficamente, vemos que a corrente máxima ocorre em $t = 4s$, o que faz bastante sentido fisicamente, já que é o ponto no qual a tensão para de ser fornecida ao sistema.

15)

a) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t) + \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $y(t) = \left(-\frac{1}{2} + \mu_0(t) - \mu_\pi(t) + \mu_{2\pi}(t)\right) sen(t)$, cujo gráfico é:

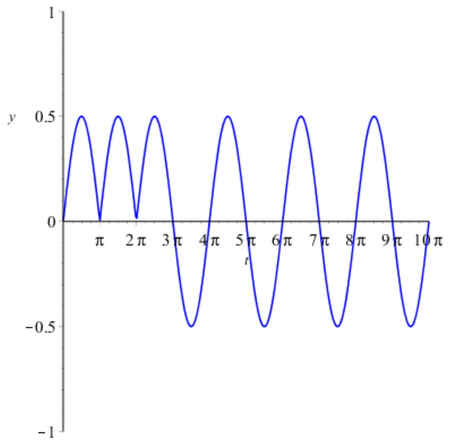


Gráfico gerado pelo software Maple

c) Caso o impulso dado fosse por um tempo indeterminado, o padrão de movimento obtido no intervalo $[0; 3\pi]$ se repetiria indefinidamente. Fisicamente, isso indicaria um corpo que, a cada vez em que fosse passar pela posição de equilíbrio, receberia um impulso de volta no sentido oposto, repetindo o padrão de movimento.

16)

a) $\begin{cases} y'' + y = \delta(t) - \delta(t-\pi) + \delta(t-2\pi) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $f(t) = \left(-\frac{1}{2} + \mu_0(t) + \mu_\pi(t) + \mu_{2\pi}(t)\right) sen(t)$, cujo gráfico é dado por:

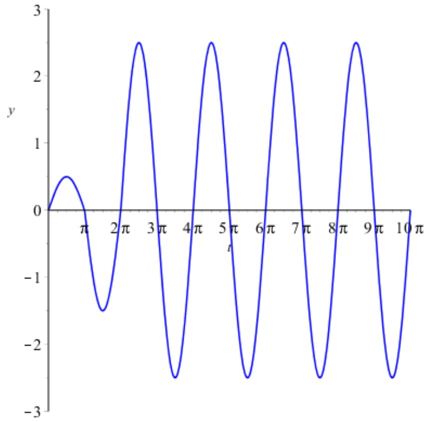


Gráfico gerado pelo software Maple

c) Caso o impulso dado fosse por um tempo indeterminado, as oscilações iriam crescer em magnitude a cada período de π segundos, indefinidamente. Fisicamente, isso indicaria um corpo que, a cada vez em que fosse passar pela posição de equilíbrio, receberia um impulso dando mais energia, no sentido do movimento, aumentando cada vez mais a amplitude do mesmo.

17)

a) Nesse problema temos representado um circuito RLC, com L = 1H; R = 1Ω; C = 2F. O circuito é alimentado por uma fonte externa, de diferença de potencial $-4\cos(t)$, que fica ligada entre $t = \frac{\pi}{2}s$ e $t = \frac{3\pi}{2}s$. A corrente inicial no circuito é de 1A, e o circuito modela um problema que determina a corrente $y(t)$ em função do tempo.