Métodos de Matemática Aplicada

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições da transformada de Laplace

OBS: Alguns exercícios dessa lista, na resolução de PVI's podem ser resolvidos sem a necessidade de transformadas de Laplace. Note que o objetivo é justamente treinar as transformadas de Laplace, então recomenda-se que os exercícios sejam feitos utilizando as transformadas, mesmo quando não explicitado.

1) Defina transformada de Laplace de uma função $f(t)$

2) Considere que a é uma constante real qualquer não-nula. Através da definição de transformada de Laplace, calcule:

a) $\mathcal{L}[1]$
b) $\mathcal{L}[t]$
c) $\mathcal{L}[t^2]$
d) $\mathcal{L}[e^{at}]$
e) $\mathcal{L}[\cos(at)]$
f) $\mathcal{L}[sen(at)]$
g) $\mathcal{L}[te^{at}]$

3) No exercício anterior, as transformadas ainda seriam válidas caso $a = 0$?

4) Demonstre as propriedades a seguir:

a) $\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$
b) $\mathcal{L}[f(t) - g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] - \mathcal{L}[g(t)]$
c) $\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)]$
d) $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$
e) $\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$
f) $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

5) Através das últimas propriedades da questão anterior, generalize as propriedades para:

a) $\mathcal{L}[t^2 f(t)]$
b) $\mathcal{L}[t^3 f(t)]$
c) $\mathcal{L}[t^n f(t)], n \in \mathbb{N}$
d) $\mathcal{L}[f''(t)]$
e) $\mathcal{L}[f'''(t)]$
f) $\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right], n \in \mathbb{N}$

6) Utilizando as propriedades de transformadas de Laplace, calcule as transformadas das funções:

a) $tcos(t)$
b) t^2e^{-3t}
c) $e^{4t}sen(3t)$
d) $te^{2t}sen(3t)$
e) $te^{-t}\cos(5t)$
f) 2^t
g) $\cosh(t)$ (OBS: $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$)
h) $senh(t)$ (OBS: $senh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$)
i) $\cosh(at)$
j) $senh(at)$
k) $e^{2t}\cosh(t)$
l) $tsenh(3t)$
m) $sen^2(t)$
n) $\cos^2(4t)$
o) $tsen(2t)\cos(4t)$

7) Determine as transformadas inversas de Laplace das seguintes equações:

a) $\frac{3}{s}$
b) $-\frac{2}{s-2}$
c) $\frac{3}{s^2+1}$
d) $\frac{2}{s^2+16}$
e) $-\frac{s}{s^2+1}$
f) $\frac{3s}{s^2+4}$
g) $\frac{5s}{25s^2+1}$
h) $\frac{s^2+s+3}{s^3}$
i) $-\frac{5}{s^2+s-6}$
j) $\frac{4s^2+15s-34}{s^3+s^2-10s+8}$
k) $\frac{8s^2-50s+2}{s^3-5s^2+s^2-5}$
l) $\frac{-4s^3-4s^2-22s}{s^4+2s^3-13s^2-14s+24}$
m) $\frac{3-4s}{s^2+1}$
n) $\frac{-1-4s}{s^2+2s+2}$
o) $\frac{10+s}{s^2+8s+25}$
p) $\frac{5s^2+7s+6}{s^3-2s^2+s-2}$
q) $\frac{5s^2-4s+7}{s^3-s^2-s-15}$
r) $\frac{4s^2-36s+82}{(s-4)^3}$

8) Através da propriedade de multiplicação por polinômio, deduza as transformadas de $f(t) = tcos(at)$ e $f(t) = tsen(at)$

9) Utilizando o exercício anterior como base, deduza a fórmula de transformada inversa para:
a) $\frac{a}{(s^2+a^2)^2}$
b) $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
c) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$

10) Faça um resumo pessoal (caso você ainda não tenha feito um) com as transformadas de Laplace das principais funções aprendidas, e também com suas propriedades.

11) Seja um corpo de massa m, preso a uma mola de constante elástica k, sujeito a uma uma força de resistência proporcional à velocidade, com constante de proporcionalidade γ, e sofrendo ação de uma força externa dada por $F(t)$, que pode variar com o tempo. Admita que esse corpo parta de uma posição x_0, com velocidade inicial V_0. Escreva o problema de valor inicial que modela fisicamente a posição $y(t)$ do corpo em função do tempo.

12) Em termos de modelagem matemática, há alguma diferença entre a mola ser horizontal ou vertical? E fisicamente, qual a diferença?

13) Em um sistema massa-mola, imagine um corpo de massa m, oscilando a partir de uma posição inicial x_0, a partir do repouso. A massa tem constante elástica k, e o atrito é desprezível. Admita que não haja nenhuma força externa agindo sobre o sistema.
a) Modele o problema através de um PVI.
b) Resolva esse PVI, em função das constantes m, k e x_0.
c) Determine o período de oscilação
d) Determine a velocidade angular do movimento

14) Refaça o problema anterior, admitindo agora que o corpo parte da origem, mas com uma velocidade inicial V_0.

15) Um corpo de massa 1Kg está oscilando em um sistema massa-mola horizontal, de constante elástica igual a 25N/m, e sofre ação de uma força de resistência de constante igual a 8Kg/s. Suponha que o movimento começa à uma distância de 0.5m da posição de equilíbrio, e parte com uma velocidade de 2m/s, afastando-se da posição de equilíbrio.
a) Escreva um PVI que represente essa situação.
b) Determine a equação que descreve esse movimento.
c) O que acontece com o sistema após um tempo muito grande?

16) Em um sistema massa-mola, um corpo de 2Kg, inicialmente na posição de equilíbrio, partindo do repouso, sofre ação de uma força externa, constante, de 4N. Admita que a constante elástica vale 10N/m, e que ele está sujeito a uma força de resistência de constante igual a 8Kg/s.

a) Escreva um PVI que represente essa situação.
b) Determine a equação que descreve esse movimento.
c) O que acontece com o sistema após um tempo muito grande?
d) Utilizando algum software gráfico, faça um esboço do gráfico de posição por tempo para esse movimento.
e) Analise se a resposta tem sentido fisicamente.

17) Um corpo de massa 1Kg está preso a uma mola de constante elástica 5N/m, e está sujeito a uma força de resistência de 2Kg/s. Esse corpo parte do repouso e da posição de equilíbrio, enquanto um motor externo age sobre ele, gerando $F(t) = 20\cos(t)$ (em unidades do SI).

a) Escreva um PVI que represente essa situação.
b) Determine a equação que descreve esse movimento.
c) O que acontece com o sistema após um tempo muito grande?
d) Utilizando algum software gráfico, faça um esboço do gráfico de posição por tempo para esse movimento.
e) Analise se a resposta tem sentido fisicamente.

Gabarito

1) Seja $f(t), t \geq 0$ uma função real. Definimos a transformada de Laplace dessa função como sendo a função $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, caso essa integral seja própria.

2)
a) $\frac{1}{s}$
b) $\frac{1}{s^2}$
c) $\frac{2}{s^3}$
d) $\frac{1}{s-a}$
e) $\frac{s}{s^2+a^2}$
f) $\frac{a}{s^2+a^2}$
g) $\frac{1}{(s-a)^2}$

3) Sim. Note que nos itens em que isso se aplica, tanto a função quanto a transformada coincidem, em todos os casos em que $a = 0$.

4)
a) $\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\big(f(t) + g(t)\big)dt = \int_0^\infty \big(e^{-st} f(t) + e^{-st} g(t)\big)dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$
b) Análogo ao item anterior.
c) $\mathcal{L}[\alpha f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\big(\alpha f(t)\big)dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \alpha \mathcal{L}[f(t)]$

d) $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt$. Seja $s - a = r$. Note que a integral independe de r, logo $\int_0^\infty e^{-rt} f(t)dt = F(r) = F(s-a)$

e) Derivando a expressão $F(s)$ na variável s, temos:
$\frac{d}{ds}\big(F(s)\big) = \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\big(e^{-st} f(t)\big)dt = \int_0^\infty e^{-st}\big(-t \cdot f(t)\big)dt = \mathcal{L}[tf(t)]$

f) $\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \Rightarrow u = e^{-st}; du = -se^{-st}dt; dv = f'(t)dt; v = f(t) \Rightarrow$
$\mathcal{L}[f'(t)] = e^{-st} f(t)|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Como $f(t)$ é de ordem exponencial, $\lim_{k\to\infty} e^{-sk} f(k) = 0$, logo:
$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = sF(s) - f(0)$

5)
a) $F''(s)$
b) $-F'''(s)$
c) $(-1)^n F^{(n)}(s)$
d) $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
e) $s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$

f) $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

6)

a) $\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$

b) $\frac{2}{(s - 3)^3}$

c) $\frac{3}{(s - 4)^2 + 9}$

d) $\frac{6(s - 2)}{((s - 2)^2 + 9)^2}$

e) $\frac{s^2 + 2s - 24}{((s + 1)^2 + 25)^2}$

f) $\frac{1}{s - \ln(2)}$

g) $\frac{s}{s^2 - 1}$

h) $\frac{1}{s^2 - 1}$

i) $\frac{s}{s^2 - a^2}$

j) $\frac{a}{s^2 - a^2}$

k) $\frac{s - 2}{s^2 - 4s + 3}$

l) $\frac{6s}{(s^2 - 9)^2}$

m) $\frac{2}{s(s^2 + 4)}$

n) $\frac{s^2 + 32}{s(s^2 + 64)}$

o) $\frac{4s^5 - 96s^3 + 2496s}{(s^2 + 36)^2 (s^2 + 4)^2}$

7)

a) 3

b) $-2e^{2t}$

c) $3\mathrm{sen}(\mathrm{t})$

d) $\frac{1}{2} sen(4t)$

e) $-\cos(t)$

f) $3\cos(2t)$

g) $\frac{1}{5}\cos\left(\frac{t}{5}\right)$

h) $1 + t + \frac{3t^2}{2}$

i) $e^{-3t} - e^{2t}$

j) $3e^{t} + 2e^{2t} - e^{-4t}$

k) $5e^{-t} + 5e^{t} - 2e^{5t}$

l) $e^{t} + 2e^{-2t} - 3e^{3t} - 4e^{-4t}$

m) $3sen(t) - 4\cos(t)$

n) $3e^{-t} sen(t) - 4e^{-t}\cos(t)$

o) $2e^{-4t} sen(3t) + e^{-4t}\cos(3t)$

p) $8e^{2t} - 3\cos(t) + sen(t)$

q) $2e^{3t} - e^{-t} sen(2t) + 3e^{-t}\cos(2t)$

r) $e^{4t}(t^2 - 4t + 4)$

8) $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$ e $\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$, respectivamente.

9)

a) $\frac{1}{2a^2} sen(at) - \frac{1}{2a} tcos(at)$

b) $\frac{1}{2a} tsen(at)$

c) $\frac{1}{2a^2} sen(at) + \frac{1}{2a} tcos(at)$

10) Questão aberta

11) $\begin{cases} my'' + \gamma y' + ky = F(t) \\ y(0) = x_0 \\ y'(0) = V_0 \end{cases}$

12) Matematicamente, o modelo será o mesmo. Fisicamente, embora o movimento oscilatório é o mesmo, o ponto de equilíbrio da mola na vertical é diferente em relação ao que seria na horizontal, devido a elongação causada pelo peso do corpo. No entanto, o movimento em relação ao ponto de equilíbrio será idêntico.

13)

a) $\begin{cases} my'' + ky = 0 \\ y(0) = x_0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $y(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

c) O período será $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

d) A velocidade angular será $\sqrt{\frac{k}{m}}$

14)

a) $\begin{cases} my'' + ky = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = V_0 \end{cases}$

b) $y(t) = V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

c) O período será $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

d) A velocidade angular será $\sqrt{\frac{k}{m}}$

15)

a) $\begin{cases} y'' + 8y' + 25y = 0 \\ y(0) = 0.5 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

b) $y(t) = \frac{4}{3}e^{-4t} sen(3t) + \frac{1}{2}e^{-4t}\cos(3t)$

c) Após um tempo grande o suficiente, o movimento irá parar, pois $\lim_{t\to 0} y(t) = 0$. Fisicamente isso faz bastante sentido, pois é um movimento com atrito, e sem ação de forças externas.

16)

a) $\begin{cases} 2y'' + 8y' + 10y = 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $y(t) = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}e^{-2t} sen(t) - \frac{2}{5}e^{-2t}\cos(t)$

c) O corpo irá ficar na posição de equilíbrio em $y = \frac{2}{5}$, pois $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{5}$

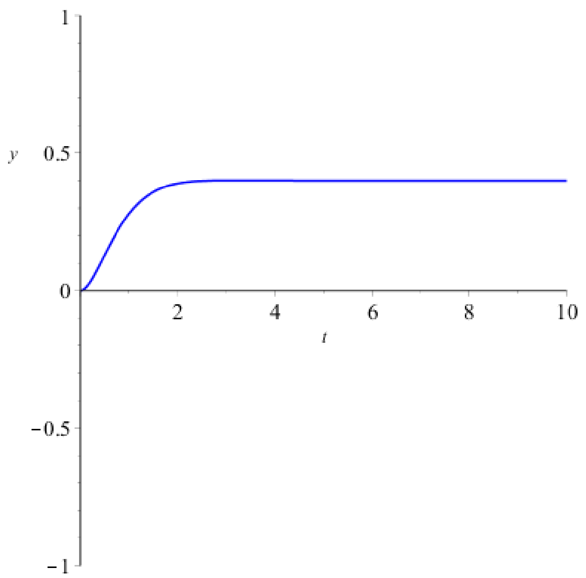
d) 

Gráfico gerado pelo software Maple

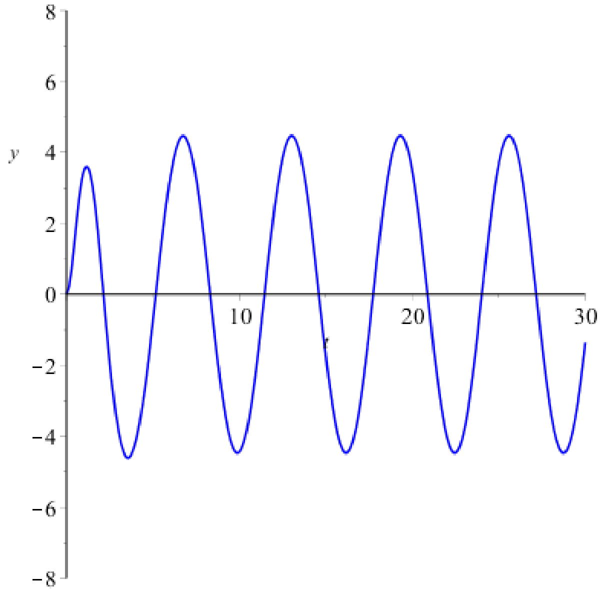
e) Questão aberta.

17)

a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 20\cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $y(t) = 4\cos(t) + 2sen(t) - 3e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t) - 4e^{-t}cos(2t)$

c) O sistema irá oscilar indefinidamente, com período 2π.



d)

Gráfico gerado pelo software Maple

e) Questão aberta