Geometria Analítica – Lista 03

Bases

Professor: Daniel Henrique Silva

Bases

1) Defina base de $\mathbb{R}^2$.

2) Dados os conjuntos a seguir, diga se eles serão bases de $\mathbb{R}^2$ ou não:
a) $B = \{(1;0);(0;1)\}$
b) $B = \{(1;1);(-1;1)\}$
c) $B = \{(\sqrt{2};1);(2;\ \sqrt{2})\}$
d) $B = \{(0;0);(3;1)\}$
e) $B = \{(\pi;\ln(3));(-5;\ \sqrt{33})\}$
f) $B = \{(1;2);(3;1);(-1;2)\}$

3) Defina base de $\mathbb{R}^3$.

4) Dados os conjuntos a seguir, diga se eles serão bases de $\mathbb{R}^3$ ou não:
a) $B = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$
b) $B = \{(1;1;0);(1;0;\ -1);(0;1;1)\}$
c) $B = \{(1;1;1);(2;1;0);(-2;0;3)\}$
d) $B = \{(1;2;3);(2;3;4);(3;4;5)\}$
e) $B = \{(2;\ -3;1);(2;4;\ -1);(0;1;4)\}$
f) $B = \{(1;2;\ -1);(0;2;\ -3);(1;0;2);(-2;1;3)\}$

5) Dizemos que uma base é **ortogonal** quando os vetores de sua base são ortogonais (ou seja, formam ângulo de 90º entre si), quando tomadas duas a duas. Verifique se as bases a seguir são ortogonais:
a) $B = \{(1;0);(0;1)\}$
b) $B = \{(2;\ -1);(2;4)\}$
c) $B = \{(1;1);(2;\ -1)\}$
d) $B = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$
e) $B = \{(3;4;0);(-4;3;0);(0;0;5)\}$
f) $B = \{(1;1;1);(1;1;\ -1);(0;1;0)\}$

6) Dadas as bases (não precisa provas que são bases) $B = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}$; $C = \{(1;1;0);(0;1;1);(1;0;1)\}$; e $D = \{(1;1;1);(2;0;\ 1);(2;\ -1;1)\}$. Considere os vetores $\vec{u}_B = (2;1;3)$; $\vec{v}_C = (0;2;-3)$ e $\vec{w}_D = (-1;0;4)$. Determine, para essas bases:
a) $\vec{u}_C$
b) $\vec{u}_D$
c) $\vec{v}_B$
d) $\vec{v}_D$
e) $\vec{w}_B$
f) $\vec{w}_C$

Matrizes Mudança de Base

7) Dadas as bases do exercício anterior, construa as matrizes $M_{B\to C}$; $M_{B\to D}$; $M_{C\to B}$; $M_{C\to D}$; $M_{D\to B}$; $M_{D\to C}$.(OBS: A ordem pedida no enunciado não necessariamente é a melhor ordem para a construção!). Confira os resultados obtidos no exercício anterior através de matrizes mudança de base.

8) Explique com suas palavras porque não podemos somar dois vetores coordenada a coordenada, quando esses vetores estão escritos em bases diferentes.

9) Interprete com suas palavras, o que significam as coordenadas do vetor $\vec{w}_B = (2;\ -1)$, onde $B = \{(1;2);(-2;1)\}$. Faça um esboço se achar necessário.

10) Admita que $M_{B\to C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde $B = \{(0;1;2);(2;0;\ -1);(1;1;0)\}$.

a) Determine $M_{C\to B}$

b) Determine os vetores da base C.

Matrizes de Rotação

11) Dada a matriz de rotação $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, demonstre que seu determinante será sempre igual a um.

12) Calcule a matriz inversa de M_θ. Interprete seu significado geometricamente.

13) Mostre que uma reta do tipo $x = \alpha$, ao ser rotacionada em 90º no sentido anti-horário se tornará uma reta do tipo $y = \alpha$.

14) Calcule como ficarão as rotações da parábola de equação $y = x^2 - 1$, quando essa é rotacionada de:

a) 30^o

b) 90^o

c) 135^o

d) 180^o

15) A equação $0.36x^2 + 0.96xy + 0.64y^2 - x - 3y + 2 = 0$ representa uma parábola rotacionada de θ no sentido anti-horário. Determine a equação dessa parábola antes da rotação.(OBS: Essa questão é, de longe, a mais difícil da lista. Considere ela como um desafio).

16) Demonstre que o gráfico de uma função do tipo $y = f(x)$, quando rotacionada de 180º ficará com equação $-y = f(-x)$.

17) Demonstre que a equação de uma circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ não sofrerá alterações, independente do ângulo de rotação aplicada sobre ela.