Geometria Analítica – Lista 02

Vetores e Bases

Professor: Daniel Henrique Silva

Vetores e operações básicas com vetores

1) Defina segmento de reta orientado.

2) Defina com suas palavras o conceito de vetor.

3) Defina com suas palavras os conceitos de norma, direção e sentido de um vetor.

4) Qual a diferença entre “vetores equipolentes” e “vetores iguais”?

5) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos. Descreva como pode ser feita a soma de vetores através da regra do paralelogramo.

6) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-nulos, com representantes $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Explique, através da regra do paralelogramo, porque $\vec{u}+\vec{v}$ tem como um de seus possíveis representantes o vetor $\overrightarrow{AC}$.

7) Faça ilustrações que descrevam as propriedades:
a) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
b) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

8) Seja ABCD um quadrado. Encontre um vetor soma em função dos pontos do quadrado dado:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$

9) Seja ABCDEF um hexágono regular, com ponto central O. Encontre um vetor soma em função dos pontos do hexágono e de seu centro:
a) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{EO}$
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}$

10) Seja ABCDEFGH um cubo, de bases ABCD e EFGH, paralelas, de modo que AE//BF//CG//DH. Encontre um vetor soma em função dos pontos do cubo:
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AH}$
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FB}$
c) $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BG}$

11) Demonstre que se $\vec{u}$ é um vetor não-nulo, então a norma de $\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ será sempre igual a um, e além disso, esse vetor terá a mesma direção e sentido que o vetor $\vec{u}$. (OBS: Esse é o chamado **versor** de $\vec{u}$, e será representado como $\hat{u}$ a partir de agora).

12) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $||\vec{u}||=5$, $||\vec{v}||=7$, e o ângulo formado entre esses vetores é de 60^o. Determine o valor de $||\vec{u}+\vec{v}||$, $||\vec{u}-\vec{v}||$ e $||\vec{v}-\vec{u}||$.

13) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores tais que $||\vec{u}||=6$ e $||\vec{v}||=3$. Determine o ângulo formado entre esses dois vetores, sabendo que $||\vec{u}+\vec{v}||=5$.

14) Demonstre que vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo reto entre eles se, e só se $||\vec{u}+\vec{v}||^2=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2$

15) O que podemos dizer sobre o ângulo entre vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ se $||\vec{u}+\vec{v}||^2 < ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$?

16) Demonstre que $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

17) Seja ABC um triângulo qualquer, cujos pontos médios dos lados AB, BC e CA são os pontos N, M e P, respectivamente.

a) Escreva os vetores $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BP}$ e $\overrightarrow{CN}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$

b) Prove que $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{PN}$, e que $\overrightarrow{PN}$ tem metade do comprimento de $\overrightarrow{BC}$

c) Prove que $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CN} = \vec{0}$

18) Prove que os pontos médios dos lados paralelos de um trapézio formam um segmento paralelo às bases, e que seu comprimento é a média das bases.

19) Prove que os pontos médios das diagonais de um trapézio formam um segmento paralelo às bases, e que seu comprimento é metade da diferença de tamanho entre as bases.

20) Utilizando o exercício anterior, prove que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seu ponto médio.

21) Seja ABCDEFGH um cubo, de bases ABCD e EFGH, paralelas, de modo que AE//BF//CG//DH. Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AD} = \vec{v}, \overrightarrow{AE} = \vec{w}$, escreva, em função dos vetores $\vec{u}; \vec{v}\ e\ \vec{w}$:

a) $\overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{BF}$

c) $\overrightarrow{CG}$

d) $\overrightarrow{CE}$

e) $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{BF} - 3\overrightarrow{CG}$

Vetores e operações básicas com vetores através de coordenadas

22) Considere os pontos $A(2;\ -1;3)$, $B(-1;3;0)$, $C(0;1;\ -3)$, $D(2;2;-1)$. Para esses pontos, calcule:

a) Os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}\ e\ \overrightarrow{DB}$.

b) Verifique, pelos resultados do item anterior, que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

c) Calcule a norma dos vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}\ e\ \overrightarrow{CD}$

d) Determine o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, entre os vetores $\overrightarrow{AB}\ e\ \overrightarrow{AC}$, e entre os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$. (OBS: Respostas da forma $\operatorname{arccos}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ são aceitáveis e até mesmo esperadas)

e) Calcule a área do triângulo ABC. (OBS: Lembre-se da fórmula de Hierão do ensino médio, que diz que se um triângulo possui arestas de medidas $a; b; c$, então sua área pode ser dada como $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$)

f) Proponha um método para determinar a distância entre o segmento de reta BC e o ponto A.

g) Classifique os triângulos ABC, ABD e BCD em acutângulos, retângulos ou obtusângulos, sem calcular os ângulos.

23) Sejam $A(2;\ -4;5); B(0;2;-3); C(-4;6;1)$ pontos do espaço $\mathbb{R}^3$.

a) O triângulo ABC formado por esses pontos é equilátero, isósceles ou escaleno?

b) Determine a medida do ângulo $\hat{A}$ desse triângulo.

c) Determine os pontos médios de cada lado do triângulo.

d) Determine o vetor que contém a mediana relativa ao vértice B desse triângulo.

24) Argumente geometricamente porque a distância entre dois pontos é a norma do vetor que os liga.

25) Sejam $A(-1;2;3), B(3;1;5); C(1;\ -4;3)$ pontos do espaço $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de um ponto D, de modo que ABCD seja um paralelepípedo…

a) …onde o lado AB é paralelo ao lado CD

b) …onde o lado AC é paralelo ao lado BD

26) Determine as coordenadas de um ponto que seja equidistante de $A(3;4;2); B(4;0,-1); C(0;-2;3)$

27) Dados os pontos $A(2;\ -1;0); B(4;0;3); C(3;2;2)$:

a) Determine as coordenadas de um ponto D tal que ABCD seja um paralelogramo com o lado AB paralelo ao lado CD.

b) Verifique que os lados AB e BC possuem o mesmo tamanho. Isso é o suficiente para dizer que ABCD será um losango? Justifique.

c) Prove que ABCD não é um retângulo.

Dependência e Independência Linear

28) Seja $B = \{v_1; v_2; \dots v_n\}$ um conjunto de vetores. Defina combinação linear dos elementos desse conjunto.

29) Defina conjunto linearmente dependente e conjunto linearmente independente.

30) Assuma que $B = \{\vec{u}\}$ é um conjunto de um único vetor de $\mathbb{R}^3$. Interprete geometricamente o que significa B ser um conjunto LI ou LD.

31) Assuma que $B = \{\vec{u}; \vec{v}\}$ é um conjunto de dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Interprete geometricamente o que significa B ser um conjunto LI ou LD.

32) Assuma que $B = \{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$ é um conjunto de três vetores de $\mathbb{R}^3$. Interprete geometricamente o que significa B ser um conjunto LI ou LD.

33) Demonstre que se $B = \{v_1; v_2; \dots v_n\}$ é um conjunto LD, então existe ao menos um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos demais.

34) Demonstre que se $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ é um conjunto LI, então nenhum dos vetores é combinação linear dos demais.

35) Demonstre que se $B = \{\vec{u};\ \vec{v}\}$ são vetores LI, então $C = \{\vec{u} + \vec{v};\ \vec{u} - \vec{v}\}$ também serão.

36) Demonstre que se $B = \{\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}\}$ são vetores LI, então $C = \{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w};\ \vec{v} + \vec{w};\ \vec{w}\}$ também serão.

37) Suponha que $B = \{\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}\}$ são vetores LI, e se $\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, então $C = \left\{\vec{u} + \vec{t};\ \vec{v} + \vec{t};\ \vec{w} + \vec{t}\right\}$ será LI se, e só se $\alpha + \beta + \gamma + 1 \neq 0$.

38) Demonstre que, independente dos vetores $\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w}$, o conjunto dado por $B = \{3\vec{u} - 4\vec{v};\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}; \vec{u} - 3\vec{w};\ \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}\}$ será sempre LD.