Álgebra Linear – Lista 02
Dependência Linear, Bases e Dimensões

Professor: Daniel Henrique Silva

Geradores e Espaços Gerados

1) Defina combinação linear.

2) Demonstre que, se $0 \in V$ é o elemento neutro de um espaço vetorial V, e $B \neq \emptyset$ é um conjunto de vetores de V, então 0 é combinação linear dos elementos de B.

3) Para cada item, verifique se os elementos v dados são combinações lineares do conjunto B dado.

a) $B \subset \mathbb{R}^2; B = \{(1;0);(0;1)\}, v = (2;2)$
b) $B \subset \mathbb{R}^3; B = \{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}, v = (\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{5})$
c) $B \subset \mathbb{R}^3;\ B = \{(2;0;1);(1;\ -1;0);(1;1;1)\}, v = (4;\ -2;1)$
d) $B \subset \mathbb{R}^3; B = \{(2;0;1);(1;\ -1;0);(1;1;1)\}, v = (-1;\ 2;2)$
e) $B \subset M_{2x2}(\mathbb{R}); B = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, v = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
f) $B \subset M_{2x2}(\mathbb{R}); B = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\right\}, v = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
g) $B \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); B = \{1, x, x^2\}, v = x^2 - 3x + 2$
h) $B \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); B = \{x^2 - 3x + 2; x^2 - x - 1; x^2 + 2x + 4\}, v = 1$

4) Demonstre que, se $B \neq \emptyset$, então $[B] \subset B$.

5) Demonstre que, se $B \neq \emptyset$, então se $u \in [B]$ e $v \in [B]$, então $u + v \in [B]$

6) Demonstre que, se $B \neq \emptyset$, então se $u \in [B]$ então $\lambda u \in [B], \forall \lambda \in \mathbb{R}$

7) Demonstre que, se $B \neq \emptyset$, então $[B]$ é um espaço vetorial.

8) Diga se as propriedades a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando (seja por demonstração, argumentação, ou por contra-exemplo no caso das falsas)

a) Se $B \subset C$, então $[B] \subset [C]$
b) Na igualdade anterior, se B é subconjunto próprio de C (ou seja, existem elementos de C que não estão em B), então $[B]$ será um subconjunto próprio de $[C]$.
c) $[B] = \big[[B]\big]$
d) Não existe nenhum conjunto finito e não-vazio, tal que $[B]$ também seja finito.
e) $[B \cap C] = [B] \cap [C]$
f) $[B \cup C] = [B] \cup [C]$

9) Dê um exemplo de um espaço finitamente gerado, e de um espaço infinitamente gerado.

10) Determine um conjunto gerador para cada um dos espaços vetoriais a seguir: (Não vale usar o próprio espaço!)

a) $\mathbb{R}^4$
b) $\mathbb{C}$
c) $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$
d) $M_{2x2}(\mathbb{C})$
e) $\{(x;y;z;w;t) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y = z + w + t$ e $x - z = t$ e $y + 2w = x\}$
f) $\{p(x) \in \mathcal{P}_2(x) \mid p'(2) + p''(1) = 0\}$
g) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ onde\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

11) Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, e dois subespaços, $U = \left\{p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0\right\}; V = \{p(x) \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(x) = p(-x)\}$. Encontre conjuntos geradores para $U; V; U \cap V$ e $U + V$.

Dependência e Independência Linear

12) Defina dependência e independência linear.

13) É possível que um conjunto infinito de vetores seja LI? Justifique.

14) É possível que um conjunto finito de vetores seja LD? Justifique.

15) Uma das definições de conjunto LI é que se $B = \{v_1; v_2; \dots v_n\}$ é LI, então $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Mostre que essa definição é equivalente à definição de que um conjunto B é LD se, e só se existir ao menos um vetor que seja combinação linear dos demais.

16) O conjunto $B = \{0\}$ é LD ou LI?

17) Demonstre que um conjunto de dois vetores é LI se, e só se os dois vetores não forem múltiplos um do outro.

18) Mostre que um conjunto de três vetores de $\mathbb{R}^2$ é sempre LD.

19) Mostre que um conjunto de cinco vetores de $M_{2x2}(\mathbb{R})$ é sempre LD.

20) Considere o conjunto $B = \{sen(x); \cos(x)\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Esse conjunto será LI se $\alpha sen(x) + \beta \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$. Essa equação possui soluções não nulas quando $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Mas ainda assim, o conjunto é claramente LI, já que essas duas funções não são múltiplas uma da outra. Justifique o ocorrido.

21) Considere o conjunto $\{\cos(x); sen(x); sen(2x)\}$.
a) Mostre que esse conjunto é LI.
b) Sabe-se que $sen(2x) = 2sen(x)\cos(x)$. Isso contraria o fato de o conjunto ser LI? Justifique.

22) Verifique se cada um dos conjuntos a seguir é LI ou LD. Quando for LD, exiba uma combinação linear entre os vetores do conjunto.
a) $B = \{(2; 3); (-1; 1)\} \subset \mathbb{R}^2$
b) $B = \{(-1; 2; 1); (0; 1; 3); (2; -3; 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
c) $B = \{(1; 2; 3; 4); (2; 3; 4; 1); (3; 4; 1; 2); (4; 1; 2; 3)\} \subset \mathbb{R}^4$
d) $B = \{(1; 0; 1; 0); (1; 1; 0; 0); (0; 1; 1; 0); (0; 0; 1; 1)\} \subset \mathbb{R}^4$
e) $B = \{(1; -1; 1; -1); (1; 1; -1; -1); (0; 1; 0; 1); (1; 0; 0; -1)\} \subset \mathbb{R}^4$
f) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2x2}(\mathbb{R})$
g) $B = \{x^4 + x^2; x^3 + x; x^2 + 1; x^4 + x; x^3 + 1\} \subset \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$
h) $B = \{1 - x^2; x^2 - 1; 2x\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
i) $B = \{(i; 0); (0; 1 - i); (1 + i; 1 + i); (1; i)\} \subset \mathbb{C}^2$

23) Dê condições sobre os coeficientes $a; b \in \mathbb{R}$ de modo que o conjunto $\{(a; b); (b; a)\}$ seja LI.

24) Demonstre ou argumente o porquê se $B = \{v_1; v_2; \dots v_n\}$ é um conjunto LI, e $C \subset B$, com $C \neq \emptyset$, então C também será um conjunto LI.

25) Demonstre ou argumente o porquê se $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ é um conjunto LD, então para qualquer conjunto C tal que $B \subset C$, temos que C será um conjunto LD.

26) Suponha que $\{u; v; w\}$ seja um conjunto LI. Verifique se os conjuntos a seguir serão LI ou LD:
a) $\{u; u + v; u + v + w\}$
b) $\{u - v; v - w; w - u\}$
c) $\{u + v; u + w; v + w\}$
d) $\{\sqrt{2}u - \sqrt{2}v; \sqrt{2}u + \sqrt{2}v; \pi^3 w\}$

Bases e Dimensões

27) Defina base de um espaço vetorial.

28) Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Proponha um processo (ou um algoritmo, se o termo não te assustar) para criar uma base para esse espaço vetorial. (OBS: A resposta desse exercício é o teorema 5.8 da apostila do professor Zani, mas tente resolver antes de olhar a resposta pronta.)

29) Demonstre que, se $B = \{b_1; \dots; b_n\}$ é uma base de um espaço vetorial finito, então $C \subset B$, com $C \neq B$ não será base do mesmo espaço vetorial.

30) Demonstre que, se $B = \{b_1; \dots; b_n\}$ é base de um espaço vetorial finito, então para qualquer conjunto C tal que $B \subset C$, temos que C não será base do mesmo espaço vetorial.

31) Argumente porque $\dim(\{0\}) = 0$

32) Para cada um dos espações vetoriais dados, determine a dimensão, e quando for uma dimensão finita, escreva uma base para o espaço:

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{C}$
c) $\mathbb{R}^5$
d) $\mathbb{C}^2$
e) $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
f) $\mathcal{P}_1(\mathbb{C})$
g) $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)$
h) $M_{3x2}(\mathbb{R})$
i) $M_{1x5}(\mathbb{R})$
j) $M_{2x2}(\mathbb{C})$
k) $M_{1x3}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$
l) $\mathcal{P}_1(M_{2x2}(\mathbb{R}))$
m) $\mathcal{P}_4(M_{3x3}(\mathbb{C}^5))$ ( OBS: Para esse item, diga a dimensão, mas não precisa mostrar uma base)
n) $\mathcal{F}(\mathbb{R};\ \mathbb{R})$

33) Demonstre que, se $\dim(V) = n$, então qualquer conjunto com $n + 1$ elementos é LD.

34) Sejam $U = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}; V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z - y\}$

a) Mostre que U e V são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$
b) Determine uma base para os espaços $U; V$ e $U \cap V$.
c) A afirmação $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

35) Sejam $U = \{(a + bi; c + di) \in \mathbb{C}^2 \mid a = d \quad e \quad b = -c\}; V = \{(a + bi; c + di) \in \mathbb{C}^2 \mid a + b + c = 0\}$

a) Mostre que U e V são subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^2$
b) Determine uma base para os espaços $U; V$ e $U \cap V$.
c) A afirmação $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

36) Sejam $U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 0 \ \ e \ \ a - b = c - d\right\}; V = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$

a) Mostre que U e V são subespaços vetoriais de $M_{2x2}(\mathbb{R})$
b) Determine uma base para os espaços $U; V$ e $U \cap V$.
c) A afirmação $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

37) Sejam $U = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = p'(1); p(1) = p'(-1); p(-1) = p'(0)\}; V = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 p(x)\,dx = 0\}$

a) Mostre que U e V são subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$
b) Determine uma base para os espaços $U; V$ e $U \cap V$.
c) A afirmação $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ é verdadeira ou falsa? Justifique.

38) Seja $U = \{(x; y; z; w; t) \in \mathbb{R}^5 \mid x = y; x + z = t; y - z = w + t\}$.

a) Mostre que U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$
b) Determine uma base para U
c) Determine um conjunto gerador para um espaço vetorial V tal que $U \oplus V = \mathbb{R}^5$

Coordenadas e Mudanças de Base

39) Em cada item, é dada uma base B e um vetor v de um espaço vetorial V. Determine as coordenadas do vetor na base, ou seja, determine v_B:

a) $B = \{(1; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0)\} \subset \mathbb{R}^3; v = (3; 1; 4)$
b) $B = \{(1; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0)\} \subset \mathbb{R}^3; v = (-2; 0; 1)$
c) $B = \{(1; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0)\} \subset \mathbb{R}^3; v = (x; y; z)$
d) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2x2}(\mathbb{R}); v = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$
e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2x2}(\mathbb{R}); v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \subset M_{2x2}(\mathbb{R}); v = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$
g) $\{x^2 + 2x + 2; x^2 - 4x + 5; x^2 + x + 1\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); v = x^2$
h) $\{x^2 + 2x + 2; x^2 - 4x + 5; x^2 + x + 1\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); v = 5x^2 - 7x - 1$
i) $\{x^2 + 2x + 2; x^2 - 4x + 5; x^2 + x + 1\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); v = ax^2 + bx + c$

40) Considere o vetor $(-2; 5) \in \mathbb{R}^2$. Considere também as bases $B = \{(1; 0); (0; 1)\}; C = \{(-2; 1); (1; 2)\}; D = \{(1; 1); (2; -1)\}$.
a) Determine as coordenadas do vetor dado nas três bases.
b) Represente geometricamente esse vetor nas três bases dadas, e verifique se o resultado encontrado faz sentido geometricamente.

41) Utilizando os dados do exercício anterior, calcule pela definição todas as matrizes de mudança de base possíveis, $M_{B\to C}; M_{C\to B}; M_{B\to D}; M_{D\to B}; M_{C\to D}; M_{D\to C}$.

42) Ainda com os dados do exercício anterior, verifique que $M_{B\to C} = (M_{C\to B})^{-1}$ e que $M_{B\to C} \cdot M_{C\to D} = M_{B\to D}$

43) Demonstre que $M_{B\to B} = I$, para qualquer espaço vetorial de dimensão finita, e qualquer base B.

44) Sejam as bases $B = \{x^2 + x + 1; x^2 + 2x + 3; 2x + 1\}; C = \{2x^2 - 1; x^2 - 2x - 2; x^2 + 2x\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
a) Determine as matrizes mudança de base $M_{B\to C}$ e $M_{C\to B}$
b) Dado $v_B = (3; 1; -2)$, determine v_C
c) Dado $v_c = (-1; 4; 0)$, determine v_B
d) Escreva o vetor x^2 em relação a ambas as bases