Geometria Analítica – Lista 01

Matrizes e Sistemas lineares

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições iniciais de matrizes

1) Defina matriz.

2) Determine explicitamente as matrizes dadas pelas leis de formação a seguir:

a) $A_{3x3}, (a_{ij}) = 2i + 3j$

b) $A_{2x4}, (a_{ij}) = ij + 1$

c) $A_{3x4}, (a_{ij}) = \cos\left(\frac{\pi i}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi j}{2}\right)$

d) $A_{4x2}, (a_{ij}) = \begin{cases} i + j, & se\ i \geq j \\ i - j, & se\ i < j \end{cases}$

e) $A_{3x3}, (a_{ij}) = \begin{cases} 2ij, & se\ i = j \\ i^2 + j^2, & se\ i \neq j \end{cases}$

f) $A_{4x3}, (a_{ij}) = \begin{cases} (i+1)^j, & se\ i < j \\ j^3 - i^2, & se\ i = j \\ 0, & se\ i > j \end{cases}$

3) Seja a matriz $A_{10x10}, (a_{ij}) = \begin{cases} i^2 - j^2, & se\ i > j \\ 0, & se\ i = j \\ (j-i)^2, & se\ i < j \end{cases}$. Calcule o valor de $a_{59} - a_{82} + a_{99}$.

4) Matrizes podem ser utilizadas para representar digitalmente (guardar na memória de um computador ou celular) fotografias. No caso mais simples, cada posição da matriz armazena a cor de um pixel. Então uma matriz armazenada como $A_{5x5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pode armazenar a imagem de um caractere P, quando associamos a cada valor diferente de zero um pixel preto, e aos demais pixels brancos. Aumentando a quantidade de valores possíveis na matriz (ao invés da matriz armazenar apenas zeros e uns), podemos representar mais cores.

a) Fisicamente, o que representa aumentar o tamanho da matriz?

b) Imagine que cada valor na matriz consuma 16 unidades de memória (suficiente para representar 65535 diferentes cores por pixel. Você vai aprender de onde veio esse número em Cálculo Numérico). Quanta memória será necessária para armazenar uma foto de tamanho 600 x 800 pixels, nessas condições?

c) Um vídeo (sem som) pode ser armazenado como uma sequência de matrizes alternando fotos rapidamente. Quanta memória seria necessária para armazenar um vídeo de três minutos, a uma frequência de 30 frames (“fotos”) por segundo, nas condições do item anterior?

Operações com Matrizes

5) Sejam as matrizes $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_{2x2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dadas. Determine:

a) $A + B$

b) $A + 3C$

c) $C + (B - A)$

d) $(3A - 2B) + C$

e) $(A + 2B)^t$

f) $(B^t - C)^t + 4A$

g) $2(3A - B^t)^t$

h) $5B^t - (5B)^t$

i) BC

j) CB
k) $(AB)C$
l) $A(BC)$
m) $B(A+C)$
n) $(AB)^t - B^t A^t$
o) $A^2 - 3B + I$, onde I representa a matriz identidade de ordem 2.
p) $Tr(C) \cdot (-2A + B^2)^t$

6) Utilizando as matrizes A, B, C do exercício anterior, resolva a equação matricial $X - 3AB^t = C^2 - 4X$

7) Defina formalmente produto de matrizes, incluindo condições para que esse produto seja possível.

8) Dê exemplo de duas matrizes A e B tais que $AB \neq BA$.

9) Dê exemplo de duas matrizes distintas A e B tais que $AB = BA$.

10) Dê exemplo de duas matrizes não-nulas A e B tais que $AB = 0$.

11) Dê exemplos de matrizes A, B e C tais que $AB = AC$, mas $B \neq C$, e $A \neq 0$

12) Sejam $A_{10x10}, (a_{ij}) = i + j$ e $B_{10x10}, (b_{ij}) = 2j$, e seja $C_{10x10} = AB$. Determine o elemento c_{58}. (OBS: Você não precisa determinar as matrizes A e B inteiras para resolver esse problema!).

13) Considere uma matriz qualquer A_{nxm}.
a) Argumente porque o produto AA^t sempre será possível. Explique porque essa matriz será sempre quadrada.
b) Demonstre que o traço dessa matriz nunca será um número negativo, independente dos valores dos elementos da matriz A, e de suas dimensões.

14) Demonstre que se A_{nxm} e B_{mxp} são matrizes quaisquer, então $(AB)^t = B^t A^t$

Determinantes

15) Seja $A_{2x2} = \begin{pmatrix} a & b \\ m & n \end{pmatrix}$. Escreva uma fórmula para $\det(A)$.

16) Quantas multiplicações e quantas somas (ou subtrações) são necessárias para calcular o determinante de uma matriz genérica de tamanho $2x2$?

17) Seja $A_{3x3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{pmatrix}$. Escreva uma fórmula para $\det(A)$.

18) Quantas multiplicações e quantas somas (ou subtrações) são necessárias para calcular o determinante de uma matriz genérica de tamanho $3x3$?

19) Estime quantas multiplicações e quantas somas (ou subtrações) seriam necessárias para calcular o determinante de uma matriz genérica de tamanho $4x4$.

20) Estime quantas multiplicações e quantas somas (ou subtrações) seriam necessárias para calcular o determinante de uma matriz genérica de tamanho nxn. (OBS: Teste esse a expressão encontrada para n = 5, n = 6, e veja o quão complexas as fórmulas para cálculo de determinante vão ficando conforme se aumenta o tamanho da matriz.)

21) Calcule os determinantes das matrizes a seguir:
a) $[-5]$
b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{12} \\ \sqrt{10} & \sqrt{20} \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$
f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} \cos(t) & -sen(t) & \cos(2t) \\ sen(t) & \cos(t) & sen(2t) \\ sen(t) & \cos(t) & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} x^3 & x^4 & x^5 \\ x^4 & x^5 & x^3 \\ x^5 & x^4 & x^3 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ c & a & c \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

l) $\begin{bmatrix} \pi & 2\pi & 3\pi \\ \sqrt{2} & \sqrt{8} & \sqrt{50} \\ e & 3e & 7e \end{bmatrix}$

m) $\begin{bmatrix} 25 & 30 & 35 \\ 40 & 56 & 64 \\ 60 & 96 & 144 \end{bmatrix}$

22) Dê exemplos de duas matrizes A e B de tamanho $2x2$ tais que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

23) Demonstre algebricamente que a matriz inversa de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é a matriz $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

24)
a) Demonstre que $\det(I_{nxn}) = 1$, onde I_{nxn} representa a matriz identidade de ordem n.
b) Demonstre que uma matriz A_{nxn} não admite inversa se $\det(A) = 0$

25) Determine as matrizes inversas de:

a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \sqrt{8} & \sqrt{20} \\ \sqrt{98} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Sistemas Lineares

26) Explique com suas palavras como funciona a resolução de sistemas através do método do escalonamento (também conhecido como método de eliminação de Gauss)

27) Explique com suas palavras como funciona a resolução de sistemas através do método da substituição (também conhecido como método da resolução de ordem)

28) Explique com suas palavras como funciona a resolução de sistemas através do método de Gauss-Jordan. Explique como esse método pode ser utilizado para resolver sistemas na forma $Ax = b_1; Ax = b_2; \dots . Ax = b_k$ simultaneamente.

29) Explique como e porque o método de Gauss-Jordan pode ser utilizado para determinar matrizes inversas.

30) Resolva os sistemas lineares da forma que achar mais conveniente, ou prove que eles não tem solução:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -6 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + z = 4 \\ x - 3y = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 6y + 3z = 6 \\ 5x + 15y + 15z = 50 \\ 6x - 8y + 4z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ 5x + 4y + 3z + 2w = 1 \\ -x + 2y - z + 2w = -1 \\ 2x - 2y + z - w = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + 3w = 10 \\ x + y + 3z + w = 12 \\ x + 3y + z + w = 14 \\ 3x + y + z + w = 16 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ 5x + 6y + 2z = 3 \end{cases}$

31) Defina posto de uma matriz.

32) Os sistemas lineares a seguir são indeterminados. Para cada um deles, determine o grau de liberdade de cada sistema, e apresente uma solução geral. (OBS: Lembre-se que é possível se resolver o sistema primeiro, e depois determinar o grau de liberdade das soluções.)

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 4 \\ -2x + 3y - z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ -2x + 3y + z = 5 \\ 3x - 4y + z = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x - y + z + w = 0 \\ y - z = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$

33) Determine uma equação de reta que passe pelos pontos $(3; -2); (5; 6)$

34) Determine uma função de segundo grau cujo gráfico passe pelos pontos $(-1; 5); (0; -2); (2; 4)$

35) Determine uma função de terceiro grau cujo gráfico passe pelos pontos $(-1; -2); (0; -3); (1; 4); (2; 1)$

36) A soma dos n primeiros números naturais é uma função de segundo grau, ou seja $1 + 2 + 3 + \cdots + n = an^2 + bn + c$. Através de sistemas lineares, deduza essa equação, e depois confira como esse resultado é igual à fórmula de soma de PA, aprendida no ensino médio.

37) A soma dos n primeiros quadrados de números naturais é uma função de terceiro grau, ou seja, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$. Através de sistemas lineares, deduza essa função.

38) Quarto números são tais que suas somas, três a três são iguais a 22, 24, 27 e 29. Modele um sistema linear que calcule que números são esses.

39) Determine coeficientes reais tais que:

a) $\frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$

b) $\frac{2x+21}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$

c) $\frac{2x^2-10x+14}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

d) $\frac{-2x^2-28x-30}{(x+4)(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$