Álgebra Linear – Lista 01
Espaços Vetoriais

Professor: Daniel Henrique Silva

Definição de Espaços Vetoriais

1) Defina espaço vetorial real, listando as propriedades.

2) Demonstre que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais, através da definição:
a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{C}$
c) $\mathbb{R}^n$
d) $M_{2x2}(\mathbb{R})$
e) $M_{nxm}(\mathbb{R})$
f) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$
g) $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
h) $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
i) $\mathbb{C}^n$

3) Dê um exemplo de um conjunto que é um espaço vetorial, mas não está listado no exercício anterior.

4) Dê um exemplo de um conjunto que não é um espaço vetorial, que não esteja no enunciado das próximas questões.

5) Porque o conjunto dos polinômios de grau exatamente igual a 5 não é um espaço vetorial?

6) Porque o conjunto $\mathbb{N}$ não é um espaço vetorial?

7) Porque o conjunto $\mathbb{Q}$ não é um espaço vetorial?

8) Considere o conjunto $\mathcal{P}_1(\mathbb{C}) = \{(a+bi)x + (c+di) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$.
a) Descreva esse conjunto com suas palavras.
b) Esse conjunto é um espaço vetorial? Demonstre caso seja, ou justifique caso contrário.

9) Demonstre que o conjunto formado pelo elemento neutro de um espaço vetorial qualquer é um espaço vetorial.

10) Considere o conjunto $U = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, e dentro desse conjunto, as operações "soma" $x \oplus y = xy$, e "multiplicação por escalar" $\lambda \odot x = x^\lambda$. Utilizando essas operações, o conjunto passa a ser um espaço vetorial.
a) Justifique porque esse conjunto não é espaço vetorial utilizando as definições padrões de soma e multiplicação por escalar de números reais.

b) Demonstre que, com essas operações, o conjunto passa a ser um espaço vetorial. (OBS: Esse item está resolvido na apostila do prof. Zani, mas tente resolvê-lo sem consulta antes de olhar lá)

Subespaços vetoriais

11) Seja U um espaço vetorial qualquer, com elemento neutro 0. Mostre que $\{0\}$ é um subespaço vetorial de U.

12) Seja U um espaço vetorial qualquer, e u um de seus vetores. Mostre que, se considerarmos o conjunto $U - \{u\}$, então o novo conjunto não será subespaço vetorial de U.

13) Verifique se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais:

a) $U = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z\}$

b) $U = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = w^2\}$

c) $U = \{(x;y;z;w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y \ \ e \ \ x + z = 3w\}$

d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid c = 0; b = d - a \right\}$

e) $U = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid A - A^t = I\}$, onde I representa a matriz identidade

f) $U = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)\}$

g) $U = \{f(x) \in \mathcal{C}([a; b];\ \mathbb{R}) \mid \int_a^b f(x)\, dx = 0\ \}$

h) $U = \{f(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid f(-1) + f(1) = f(5)\}$

i) $U = \{f(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid f(-1) \cdot f(1) = f(5)\}$

14) Assuma que o conjunto $U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_{11} + d_{11}i & c_{12} + d_{12}i \\ c_{21} + d_{21}i & c_{22} + d_{22}i \end{pmatrix} \mid a_{ij}; b_{ij}; c_{ij}; d_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ é um espaço vetorial. (OBS: Não é necessário mostrar isso!). Esse é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a um, cujos coeficientes são matrizes 2x2 de entradas complexas.

a) Determine quem é o elemento neutro desse espaço.

b) Considere o subconjunto $V \subset U$, tal que $V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_{11} + d_{11}i & c_{12} + d_{12}i \\ c_{21} + d_{21}i & c_{22} + d_{22}i \end{pmatrix} \mid a_{ij} = a_{ji}; b_{ij} = b_{ji}; c_{ij} = c_{ji}; d_{ij} = d_{ji} \right\}$. Mostre que V é subespaço vetorial de U.

c) Considere o subconjunto $W \subset U$, tal que $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c_{11} + d_{11}i & c_{12} + d_{12}i \\ c_{21} + d_{21}i & c_{22} + d_{22}i \end{pmatrix} \mid a_{ij} = 0; c_{ij} = 0 \right\}$. Mostre que W é subespaço vetorial de U.

d) Descreva o conjunto $V \cap W$. Esse conjunto é um espaço vetorial? Justifique.

e) Descreva o conjunto $V + W$. Esse conjunto é um espaço vetorial? Justifique.

f) Descreva o conjunto $V \cup W$. Esse conjunto é um espaço vetorial? Justifique.

15) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Mostre que os únicos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ são a origem, retas que passam pela origem, e o próprio espaço $\mathbb{R}^2$.

16) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Mostre que os únicos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ são a origem, retas que passam pela origem, planos que passam pela origem, e o próprio espaço $\mathbb{R}^3$

17) Dê um exemplo geométrico de dois subespaços vetoriais cuja união não é um subespaço vetorial.

18) Demonstre que se $U; V$ são subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial, e $U \cup V$ é subespaço vetorial também, então $U \subset V$ ou $V \subset U$.

19) Dados os espaços $U; V; W$, verifique se $U = V \oplus W$

a) $U = \mathbb{R}^3; V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\ e\ z = 0\}; W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

b) $U = \mathbb{R}^3; V = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z\};\ W = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y - z\}$

c) $U = M_{2x2}(\mathbb{R});\ V = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}; W = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$

d) $U = \mathcal{P}_2(\mathbb{R});\ V = \{f(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}; W = \{f(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid f(-1) = f(1)\}$

e) $U = \mathcal{P}_2(\mathbb{R});\ V = \{f(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x)\}; W = \{f(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$

20) Para cada um dos subespaços V de um espaço vetorial U dado, determine um subespaço vetorial $W \subset U$, de modo que $U = V \oplus W$

a) $U = \mathbb{R}^2; V = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

b) $U = \mathbb{R}^5; V = \{(x; y; z; w; t) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y = z\ e\ w - t = x\}$

c) $U = M_{2x2}(\mathbb{R}); V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $U = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid a + b = c + d\ \ e\ \ a + c = b + d\}$

e) $U = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); V = \{f(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid \int_{-1}^{1} f(x) dx = 0\}$