Cálculo 1 – Lista 06

Integrais

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições iniciais de integrais indefinidas

1) Defina primitiva de uma função.

2) Demonstre que, se $F(x)$ é uma primitiva para a função $f(x)$, então $F(x)+C$ também será uma primitiva da mesma função $f(x), \forall C \in \mathbb{R}$.

3) Demonstre que se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são ambas primitivas de uma mesma função contínua $f(x)$, então $F_1(x) = F_2(x) + C$, para alguma constante $C \in \mathbb{R}$

4) Interprete geometricamente, através de inclinações de retas tangentes, a relação algébrica dada por: $F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow F(x) + C = \int f(x)dx$.

5) Demonstre que $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6) Demonstre que $\int f(x) - g(x)\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

7) Demonstre que $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

8) Dê um exemplo de duas funções tais que $\int \big(f(x)\cdot g(x)\big)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$

9) Dê um exemplo de duas funções tais que $\int \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

Integrais indefinidas "básicas"

10) Complete a tabela "básica" de integrais, admitindo que λ é uma constante real qualquer. OBS: Note que algumas das integrais serão deduzidas no decorrer da lista, em outros pontos. Você não precisa preencher toda essa lista nesse instante, mas é um bom exercício para revisar as integrais diretas.

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
0		λ		x	
$x^n, (n \neq -1)$		$\frac{1}{x}$		$sen(x)$	
$sen(\lambda x)$		$\cos(x)$		$\cos(\lambda x)$	
$tg(x)$		$\sec(x)$		$\sec^2(x)$	
$\sec(x)\cdot tg(x)$		$cotg(x)$		$cossec(x)$	
$cossec^2(x)$		$cossec(x)\cdot cotg(x)$		e^x	
$e^{\lambda x}$		λ^x		$\frac{1}{x^2+1}$	

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\frac{1}{x+\lambda}$		$senh(x)$	
$\cosh(x)$		$senh(\lambda x)$		$\cosh(\lambda x)$	

Técnicas de integração

11) Descreva com suas palavras como funciona a técnica de integração por substituição simples. Diga também em que situações essa técnica é adequada.

12) Descreva com suas palavras como funciona a técnica de integração por partes. Diga também em que situações essa técnica é adequada.

13) Descreva com suas palavras como funciona a técnica de integração por frações parciais. Diga também em que situações essa técnica é adequada.

14) Descreva com suas palavras como funciona a técnica de integração por substituição trigonométrica. Diga também em que situações essa técnica é adequada.

15) Algumas integrais tabeladas anteriormente possuem uma dedução não óbvia. O objetivo desse exercício é deduzir essas integrais, lembrando que a tabela pode ser utilizada para resolver essas integrais, estamos apenas mostrando como deduzí-las.

a) Resolva a integral $\int tg(x)dx$, lembrando que $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$.
b) Resolva a integral $\int \sec(x)\,dx$, multiplicando e dividindo por $\sec(x) + tg(x)$
c) Resolva a integral $\int cotg(x)\,dx$, lembrando que $cotg(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$
d) Resolva a integral $\int cossec(x)dx$, multiplicando e dividindo por $cossec(x) + cotg(x)$

16) Vamos deduzir algumas integrais que podem complementar a sua tabela "básica" de integrais da seção anterior. Admita para esse exercício que α e β são constantes reais, com $\alpha \neq 0$.

a) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int (x+\alpha)^n dx = \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \neq -1$
b) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int \frac{1}{x+\alpha}dx = \ln|x-\alpha| + C$
c) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int (\alpha x+\beta)^n dx = \frac{(\alpha x+\beta)^{n+1}}{\alpha(n+1)} + C, \forall n \neq -1$
d) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int \frac{1}{\alpha x+\beta}dx = \frac{\ln|\alpha x+\beta|}{\alpha} + C$
e) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int \cos(x+\alpha)\; dx \; = sen(x+\alpha) + C$
f) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int \cos(\alpha x+\beta)\,dx \; = \frac{sen(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C$
g) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int sen(x+\alpha)dx = -\cos(x+\alpha) + C$
h) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int sen(\alpha x+\beta)dx = -\frac{\cos(\alpha x+\beta)}{\alpha} + C$
i) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int e^{x+\alpha}dx = e^{x+\alpha} + C$
j) Através de uma mudança de variável, demonstre que $\int e^{\alpha x+\beta}dx = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{\alpha} + C$
k) Através de uma mudança de variável, demonstre que se $\int f(x)dx = F(x)$, então $\int f(\alpha x+\beta)dx = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}$

17) Considere as funções definidas recursivamente pela expressão:

$f_0(x) = \frac{1}{xln(x)}$
$f_1(x) = \frac{1}{xln(x)\ln(ln(x))}$
$f_2(x) = \frac{1}{xln(x)\ln(ln(x))\ln(ln(ln(x)))}$
…
$f_n(x) = \frac{f_{n-1}(x)}{\ln\left(\frac{x \cdot f_{n-2}(x)}{f_{n-1}(x)}\right)}$

a) Calcule $\int f_0(x)dx$
b) Calcule $\int f_1(x)dx$
c) Dê uma expressão geral para $\int f_n(x)dx$

18) Sejam α, β constantes reais não nulas. Calcule, em função das constantes:

a) $\int xcos(\alpha x)dx$
b) $\int xsen(\alpha x)dx$

c) $\int x^2 \cos(\alpha x)\, dx$
d) $\int x^2 sen(\alpha x)\, dx$
e) $\int x e^{\alpha x} dx$
f) $\int x^2 e^{\alpha x} dx$
g) $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\, dx$
h) $\int e^{\alpha x} sen(\beta x) dx$
i) $\int \cosh(\alpha x) \cos(\beta x)\, dx$
j) $\int \cosh(\alpha x)\, sen(\beta x) dx$
k) $\int senh(\alpha x) \cos(\beta x)\, dx$
l) $\int senh(\alpha x) sen(\beta x)\, dx$

19) Embora as funções a seguir não sejam o produto de duas funções diferentes, resolva as integrais a seguir utilizando-se do método de integração por partes e o fato de que $\int f(x) dx = \int 1 \cdot f(x)\, dx$
a) $\int \ln(x)\, dx$
b) $\int \ln(\alpha x)\, dx$
c) $\int arcsen(x)\, dx$
d) $\int arcsen(\alpha x)\, dx$
e) $\int arctg(x)\, dx$
f) $\int arctg(\alpha x) dx$

20) Seja $n \in \mathbb{N}^*$ um número natural, e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Determine uma lei de recursão que calcule as integrais a seguir, em função das constantes n e α:
a) $\int x^n sen(x) dx$
b) $\int x^n sen(\alpha x) dx$
c) $\int x^n \cos(x)\, dx$
d) $\int x^n \cos(\alpha x)\, dx$
e) $\int \ln^n(x)\, dx$
f) $\int \cos^n(x)\, dx$
g) $\int \cos^n(\alpha x)\, dx$
h) $\int sen^n(x)\, dx$
i) $\int sen^n(\alpha x)\, dx$
j) $\int \sec^n(x)\, dx$
k) $\int \sec^n(\alpha x)\, dx$
l) $\int \mathrm{tg}^n(x) dx$
m) $\int tg^n(\alpha x)\, dx$
n) $\int cossec^n(x) dx$
o) $\int cossec^n(\alpha x) dx$
p) $\int cotg^n(x) dx$
q) $\int cotg^n(\alpha x) dx$

21) Se $n \in \mathbb{N}^*$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, deduza uma fórmula geral para as integrais, em função das constantes n e α:
a) $\int x^n \ln(x)\, dx$
b) $\int x^n \ln(\alpha x)\, dx$

22) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ constantes reais não-nulas. Determine, em função de α e β os valores das integrais:
OBS: Lembre-se das relações trigonométricas de transformar produtos em somas.
a) $\int \cos(\alpha x) \cos(\beta x)\, dx$
b) $\int \cos(\alpha x) \sin(\beta x)\, dx$
c) $\int sen(\alpha x) sen(\beta x)\, dx$

23) Sejam α, β constantes reais não-nulas. Determine, em função de α e β os valores das integrais:

a) $\int \frac{1}{x-\alpha} dx$
b) $\int \frac{\alpha}{x-\beta} dx$
c) $\int \frac{1}{\alpha x+\beta} dx$
d) $\int \frac{1}{x^2+\alpha^2} dx$
e) $\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx$
f) $\int \frac{x}{x^2+\alpha^2} dx$

24) Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ coeficientes reais tais que $A^2 - 4B > 0$, ou seja, tais que $x^2 + Ax + B = 0$ admita duas raízes reais distintas.

a) Fatore a equação $x^2 + Ax + B = 0$ na forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, em função dos coeficientes A e B.
b) Separe a fração $\frac{1}{x^2 + Ax + B}$ em forma de frações parciais.
c) Separe a fração $\frac{x}{x^2 + Ax + B}$ em forma de frações parciais.
d) Calcule a integral $\int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + Ax + B} dx$.

25) Sejam α, β uma constante real não-nula. Determine, em função de α e β, os valores das integrais a seguir:
a) $\int \sqrt{x^2 - \alpha^2} dx$
b) $\int \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx$
c) $\int \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$
d) $\int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 - \beta^2}} dx$
e) $\int \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - x^2}} dx$
f) $\int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + \beta^2}} dx$

26) Calcule as integrais:
a) $\int 3x - 5\, dx$
b) $\int (x^2 - 3)^2\, dx$
c) $\int \sqrt{x} - \sqrt{3x + 2}\, dx$
d) $\int \sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[4]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt[6]{x^7}}\, dx$
e) $\int sen(2x) + 2sen(x)\, dx$
f) $\int e^x + x^e + e^e\, dx$
g) $\int x^2 + 2^x\, dx$
h) $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^2} dx$
i) $\int \sec^2(3x)\, dx$
j) $\int cotg(2x) cossec(2x) dx$
k) $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$
l) $\int x\sqrt{9 - x^2} dx$
m) $\int x^2 e^{-3x^3} dx$
n) $\int \cos(x) \sqrt{\text{sen}^3(x)}\, dx$
o) $\int \frac{x^2 - 6}{x^3 - 18x} dx$
p) $\int \frac{sen(x)}{\cos^3(x)} dx$
q) $\int \frac{4}{x ln(x)} dx$
r) $\int \frac{1}{x ln(x) \ln(ln(x))} dx$
s) $\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt[3]{tg^2(x)}} dx$
t) $\int \frac{\arctan^4(x)}{x^2 + 1} dx$
u) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1} dx$
v) $\int x\sqrt{2 - 2x} dx$
w) $\int \frac{x^3}{4x + 7} dx$
x) $\int \frac{\cos(arcsen(x))}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
y) $\int x^3 \cdot \sqrt{x^2 + 1}\, dx$
z) $\int e^x \cos(e^x)\, sen(e^x)\, dx$
aa) $\int 2xe^{-4x} dx$
bb) $\int 3x^2 e^{2x} dx$
cc) $\int x \cdot 4^x dx$
dd) $\int \frac{x^2}{5^{2x}} dx$
ee) $\int x cos\left(\frac{3x}{2}\right) dx$
ff) $\int x^3 sen(x) dx$
gg) $\int e^{3x} 2^x dx$
hh) $\int e^{-x} \cos(4x)\, dx$
ii) $\int 3^x sen(3x) dx$
jj) $\int xe^x sen(x) dx$
kk) $\int xe^x \cos(x)\, dx$

ll) $\int xln(x)dx$
mm) $\int \ln^2(x)\,dx$
nn) $\int x^2 \ln(x)\,dx$
oo) $\int xarctg(3x)dx$
pp) $\int x^2arctg(x)dx$
qq) $\int xarcsen(2x)dx$
rr) $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$
ss) $\int x^8e^{-x^3}dx$
tt) $\int e^{\sqrt{x}}dx$
uu) $\int sen^2(x)\,dx$
vv) $\int \cos^2(3x)\,dx$
ww) $\int sen^3(-x)dx$
xx) $\int sen^4(x)\,dx$
yy) $\int \cos^6(x)\,dx$
zz) $\int sen^7(2x)dx$
aaa) $\int \cos^9(x)\,dx$
bbb) $\int sen^5(x)\cos(x)\,dx$
ccc) $\int sen^4(x)\cos^3(x)\,dx$
ddd) $\int sen^7(x)\cos^2(x)\,dx$
eee) $\int sen^2(x)\cos^4(x)\,dx$
fff) $\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx$
ggg) $\int \cos(4x)\,sen(x)\,dx$
hhh) $\int sen\left(\frac{x}{3}\right)sen\left(-\frac{x}{4}\right)dx$
iii) $\int sen(x)sen(2x)sen(3x)dx$
jjj) $\int \cos(2x)\,sen(3x)sen(5x)dx$
kkk) $\int xcos(x)\cos(2x)\,dx$
lll) $\int x^2sen^2(x)dx$
mmm) $\int e^{2x}\cos^2(x)\,dx$
nnn) $\int \sec^3(4x)\,dx$
ooo) $\int \sec^6(x)\,dx$
ppp) $\int tg^4(x)\,dx$
qqq) $\int tg^5(x)dx$
rrr) $\int tg^3(x)\sec^2(x)\,dx$
sss) $\int tg^2(x)\sec^3(x)\,dx$
ttt) $\int tg^3(x)\sec^3(x)\,dx$
uuu) $\int cossec^4(x)dx$
vvv) $\int cossec^5(x)dx$
www) $\int cotg^3(2x)dx$
xxx) $\int cotg^6(x)dx$
yyy) $\int cossec^2(x)cotg^2(x)dx$
zzz) $\int cossec^3(x)cotg^2(x)dx$
aaaa) $\int cossec^3(x)cotg^3(x)dx$
bbbb) $\int \frac{4}{2x+5}dx$
cccc) $\int \frac{x^2-5x+9}{2x-3}dx$
dddd) $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x-7}dx$
eeee) $\int \frac{4x+3}{x^2-x-6}dx$
ffff) $\int \frac{-7x-11}{x^2+4x+3}dx$
gggg) $\int \frac{18x+44}{2x^2+8x}dx$
hhhh) $\int \frac{10x+26}{x^3-4x^2+x+6}dx$
iiii) $\int \frac{4x^2-15x-6}{x^3-x^2-6x}dx$
jjjj) $\int \frac{9x^2-12x-69}{x^3-2x^2-23x+60}dx$
kkkk) $\int \frac{3x^4-4x^3-5x^2-3x+7}{x^3-2x^2-x+2}dx$
llll) $\int \frac{x^5+x^4-2x^3+12x^2-27x-36}{x^3+x^2-6x}dx$
mmmm) $\int \frac{6x^3-9x^2-17x+12}{x^4-7x^2+6x}dx$

nnnn) $\int \frac{3x^5 - 11x^4 - 15x^3 + 86x^2 - 83x + 12}{x^4 - 7x^2 + 6x} dx$

oooo) $\int -\frac{2}{(x+2)^2} dx$

pppp) $\int \frac{x}{(x+2)^2} dx$

qqqq) $\int \frac{4}{(x+4)^5} dx$

rrrr) $\int \frac{x^3 - 5x + 6}{(x-1)^2} dx$

ssss) $\int \frac{x^2 - 5x - 2}{x^3 + 2x^2} dx$

tttt) $\int \frac{-6x^2 + 24x - 25}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} dx$

uuuu) $\int \frac{-x^3 + 10x^2 - 2x - 101}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} dx$

vvvv) $\int \frac{4x^2 - 16x - 4}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9} dx$

wwww) $\int \frac{x^7 - 3x^5 + 4x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 1}{x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x} dx$

xxxx) $\int \frac{1}{x^2 + 25} dx$

yyyy) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

zzzz) $\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$

aaaaa) $\int \frac{2x + 1}{x^2 + 16} dx$

bbbbb) $\int \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 10} dx$

ccccc) $\int \frac{x^4 - 8x^3 + 57x^2 - 164x + 351}{x^2 - 4x + 29} dx$

ddddd) $\int \frac{-2x^2 + 3x - 8}{x^3 + 4x} dx$

eeeee) $\int \frac{4x^2 - 2x + 14}{x^3 - 5x^2 + x - 5} dx$

fffff) $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 25}{x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 64x + 48} dx$

ggggg) $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 20x + 34}{x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12} dx$

hhhhh) $\int \frac{3x^3 - 9x^2 + 16x - 150}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 9x - 54} dx$

iiiii) $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 48x + 13}{x^5 - 10x^2 - x + 10} dx$

jjjjj) $\int \frac{5x^6 - 3x^5 + x^4 - 54x^3 + 31x^2 + 101x - 17}{x^5 - 10x^2 - x + 10} dx$

kkkkk) $\int \frac{5x^3 - 20x^2 + 23x - 5}{x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 20} dx$

lllll) $\int \frac{x^8 - 4x^7 + 7x^6 - 6x^5 + 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1}{x^5 - 5x^4 + 11x^3 - 13x^2 + 8x - 2} dx$

mmmmm) $\int \frac{x^7 + 5x^5 - 38x^3 + 4x^2 - 26x - 20}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$

nnnnn) $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$

ooooo) $\int \frac{x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} dx$

ppppp) $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$

qqqqq) $\int \sqrt{4x^2 - 25} dx$

rrrrr) $\int \sqrt{9x^2 + 16}\, dx$

sssss) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

ttttt) $\int \frac{4}{\sqrt{x^2+36}} dx$

uuuuu) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

27) A seguir apresentamos alguns desafios, com integrais de nível mais complexo que as integrais apresentadas anteriormente. Você é livre para tentar resolvê-las, mas não se sinta pressionado caso não consiga, elas são desafiadoramente difíceis.

a) $\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{1+tg^4(x)}} dx$

b) $\int \frac{1}{1 + x^4} dx$

c) $\int (4e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}\, dx$

d) $\int \frac{senh^2(arctg(\ln(x)))}{x(1+\ln^2(x))} dx$

e) $\int \frac{sen(2x)}{sen^6(x) - 9sen^5(x) + 38sen^4(x) - 106sen^3(x) + 181sen^2(x) - 205sen(x) + 100} dx$

Integrais definidas e soma de Riemann

28) Seja $f: [a; b]$ uma função real contínua tal que $f(x) > 0, \forall x \in [a; b]$, e seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural não-nulo. Explique com suas palavras como a soma $\sum_{i=1}^{n} [f(c_i)\Delta x]$, onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, e $c_i \in [a + (i-1) \cdot \Delta x;\ a + i \cdot \Delta x]$ aproxima a área abaixo do gráfico da função. Explique também como a aproximação se comporta conforme o valor de Δx diminui.

29) Considere a função $f: [2; 5] \to \mathbb{R}, f(x) = x$. Com a intenção de estimar a área abaixo do gráfico dessa função, utilizamos uma partição uniforme (subdividindo o domínio em subintervalos iguais), de tamanho Δx. Sobre essa partição, criamos retângulos de base Δx, e altura $f(c_i)$, onde c_i é um ponto do subintervalo criado. Utilizando um somatório como o proposto no exercício anterior, estime o valor da área desse gráfico quando…

a) … temos 10 subintervalos, e c_i é tomado como o extremo à esquerda de cada subintervalo.
b) … temos 50 subintervalos, e c_i é tomado como o extremo à direita de cada subintervalo.
c) … temos n subintervalos, e c_i é tomado como o extremo à esquerda de cada subintervalo. (OBS: Esse resultado ficará em função de um somatório com a variável Δx)
d) Calcule o limite para Δx tendendo a zero para a resposta da questão anterior.
e) Calcule a área exata, utilizando geometria.

30) Considere a função $f: [1; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$. Com a intenção de estimar a área abaixo do gráfico dessa função, utilizamos uma partição uniforme (subdividindo o domínio em subintervalos iguais), de tamanho Δx. Sobre essa partição, criamos retângulos de base Δx, e altura $f(c_i)$, onde c_i é um ponto do subintervalo criado. Utilizando um somatório como o proposto no exercício anterior, estime o valor da área desse gráfico quando…

a) … temos 20 subintervalos, e c_i é tomado como o extremo à esquerda de cada subintervalo.
b) … temos 50 subintervalos, e c_i é tomado como o extremo à direita de cada subintervalo.
c) … temos 200 subintervalos, e c_i é tomado como o ponto médio de cada subintervalo.
d) Admita que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Utilizando esse fato, estime a área abaixo do gráfico pedido, utilizando n subintervalos, e tomando c_i como sendo o extremo à direita de cada subintervalo. (OBS: Esse resultado ficará em função de um somatório com a variável Δx)
e) Calcule o limite para Δx tendendo a zero para a resposta da questão anterior.

Teorema fundamental do cálculo

31) Enuncie o teorema fundamental do cálculo.

32) Demonstre que $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

33) Demonstre que $\int_a^a f(x)dx = 0$, e interprete geometricamente esse fato.

34) Demonstre que $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\,dx$, e interprete geometricamente esse fato.

35) Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \int_2^x t^3 dt$
b) $f(x) = \int_x^{10} \cos(2t)\,dt$
c) $f(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{4x} e^t dt$
d) $f(x) = \int_{sen(x)}^{\cos(x)} tg^4(t)dt$
e) $f(x) = \int_{\ln(x)}^{x^4} \frac{\cos(4t)}{t} dt$

36) Explique como ficam os limites de integração ao aplicarmos a técnica de integração por partes em uma integral definida.

37) Explique como ficam os limites de integração ao aplicarmos a técnica de substituição simples em uma integral definida.

Aplicações geométricas de integral

38) Explique, com as suas palavras como uma integral definida pode ser utilizada para calcular a área abaixo de um gráfico de função.

39) Sejam $f, g: [a; b] \to \mathbb{R}, f(x), g(x)$ funções reais contínuas tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Demonstre que a área entre os gráficos das funções é dada por $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$

40) Na situação da questão anterior, a restrição $0 \leq g(x)$ é essencial para que a área entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ seja dada por $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$?

41) Determine a área abaixo do gráfico $f(x) = xe^x$, acima da reta $y = 0$, e à esquerda da reta $y = 2$.

42) Determine a área limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 - x - 6$ e o eixo x.

43) Considere a função $f: [1; a] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Determine o valor da constante a de modo que a área do gráfico abaixo dessa parábola, para $x \in [1; a]$ seja igual a $\frac{10}{3}$.

44) Determine a área limitada entre os gráficos das funções $f(x) = x^2 + x + 2$ e $g(x) = -x^2 + 10x - 4$

45) Considere as funções $f, g: [0; 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, g(x) = x^m$, onde $0 < n < m$. Calcule, em função das constantes n e m, a área do gráfico formado entre essas duas funções.

46) Demonstre que a área de uma circunferência de raio R é πR^2

47) Explique com suas palavras porque o comprimento da curva gerada pelo gráfico de uma função da forma $y = f(x)$, para $x \in [a; b]$ é dado por $\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}dx$

48) Calcule o comprimento da curva gerada pelo gráfico de $f(x) = 3x + 4,$ para $x \in [-2; 5]$. Confira o resultado utilizando o teorema de Pitágoras.

49) Demonstre que o comprimento de uma circunferência de raio R é igual a $2\pi R$

50) Embora o gráfico da função $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-1; 1]$ lembre o gráfico de uma semicircunferência de centro na origem e raio igual a 1, podemos provar matematicamente que se tratam de gráficos distintos. Uma forma de fazer isso é verificar que o comprimento da curva gerada não é o mesmo que o comprimento de um semicírculo. Calcule o comprimento de arco para essa parábola, e compare o resultado com o comprimento do semicírculo correspondente.

51) Explique com suas palavras porque o volume de um sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de uma função $f(x)$, para $x \in [a; b]$ em torno do eixo x é dado por $\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx$

52) Calcule o volume gerado pela rotação da reta $y = 2x - 4$, para $x \in [2; 6]$, e compare o resultado com a fórmula de volume de um cone, aprendida no ensino médio.

53) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região entre os gráficos das funções $f(x) = 3 + \cos(x)$ e $g(x) = 1$, para $x \in [0; \pi]$

54) Demonstre que o volume de uma esfera de raio R é dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$

55) Explique com suas palavras porque o volume de um sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de uma função $f(x)$, para $x \in [a; b]$ em torno do eixo y é dado por $\int_a^b 2\pi x \cdot f(x)\, dx$.

56) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico da função $f(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$ em torno do eixo y. Compare o resultado com o volume gerado pela rotação do gráfico da função $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0; 1]$ em torno do eixo x. Explique matematicamente o ocorrido.

57) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de $f(x) = \cos(x)\,, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, em torno do eixo y.

58) Explique com suas palavras porque a área lateral de um sólido de revolução gerado pela rotação do gráfico de uma função $f(x)$, para $x \in [a; b]$ é dado por $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}dx$

59) Calcule a área lateral do cone gerado pela rotação da reta $y = x$ em torno do eixo x, para $x \in [0; 3]$. Compare o resultado com a fórmula de área lateral de um cone, do ensino médio.

60) Demonstre que a área externa de uma esfera de raio R é igual a $4\pi R^2$

61) Calcule a área total do sólido gerado pela rotação entre os gráficos de $f(x) = x^2 + 1$, e da reta $g(x) = 1$, para $x \in [-1; 1]$ em torno do eixo x.

62) Determine a área do toro (também conhecido como *donut*) gerado pela rotação da circunferência $x^2 + (y-2)^2 = 1$, em torno do eixo x.

63) Descreva como calcular o volume de um sólido de revolução gerado pelo gráfico de uma função $f(x)$, para $x \in [a; b]$, em torno de uma reta da forma $y = \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante real qualquer.

64) Descreva como calcular o volume de um sólido de revolução gerado pelo gráfico de uma função $f(x)$, para $x \in [a; b]$, em torno de uma reta da forma $x = \beta$, onde $\beta \in \mathbb{R}$ é uma constante real qualquer