Cálculo 1 - Lista 05

Aplicações de Derivada

Professor: Daniel Henrique Silva

Retas tangentes e retas normais

1) 🖳 Considere, para cada item, a função dada e o ponto dado. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto dado, e, utilizando um software gráfico, faça um esboço da função e da reta tangente obtida.

a) $f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$
b) $f(x) = x^2; x_0 = -1$
c) $f(x) = x^2; x_0 = 2$
d) $f(x) = -2x^2 + 5x - 3; x_0 = 4$
e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}; x_0 = 3$
f) $f(x) = \frac{1}{3x+4}; x_0 = -1;$
g) $f(x) = \cos(x)\,; x_0 = \frac{\pi}{3}$
h) $f(x) = sen^2(x); x_0 = \frac{3\pi}{2}$
i) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}; x_0 = 4$
j) $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}; x_0 = 1$
k) $f(x) = e^x; x_0 = 0$
l) $f(x) = xe^{-x}; x_0 = 1$
m) $f(x) = arcsen(x); x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
n) $f(x) = \frac{sen(2x)}{\cos(3x)}; x_0 = 0$
o) $f(x) = x^2 - x \cdot \ln(x^2 + 1)\,; x_0 = 1$
p) $f(x) = tgh(x); x_0 = 0$

2) Demonstre que a reta tangente ao gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$ e, um ponto x_0 qualquer é a reta dada pela equação $y = ax + b$.

3) Dê um exemplo de uma reta que toque o gráfico de uma função uma única vez, mas que não é tangente ao gráfico da função.

4) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$

a) 🖳 Utilizando um software gráfico, esboce o gráfico dessa função.
b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto de abscissa $x_0 = 1$.
c) Mostre que essa reta tangente toca o gráfico da função no ponto $(-2; 0)$
d) 🖳 Utilizando um software gráfico, esboce o gráfico da função e da reta simultaneamente
e) 🖳 Ainda utilizando software gráfico, esboce o gráfico da função e da reta simultaneamente, dando zoom na região próxima ao ponto de intersecção.

5) Se uma reta é tangente ao gráfico de uma função, isso quer dizer que essa reta toca o gráfico da função uma única vez? Justifique.

6) Defina reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto x_0.

7) Defina reta normal ao gráfico de uma função em um ponto x_0.

8) Considere a função $f(x) = x^2 - 5x + 7$. Determine, caso exista, uma reta tangente ao gráfico da função, tal que essa reta seja paralela à reta $y = \frac{2}{7} - \frac{5x}{3}$.

9) Considere a função $f(x) = x^2 - 5x + 7$. Determine, caso exista, uma reta normal ao gráfico da função, tal que essa reta seja paralela à reta $y = \frac{2}{7} - \frac{5x}{3}$.

10) Seja a parábola dada pela função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a; b; c$ são constantes reais, e $a \neq 0$. Suponha que a reta $r: y = \alpha x + \beta$ seja dada. Prove que sempre haverá uma, e apenas uma reta tangente ao gráfico de $f(x)$, e paralela à reta r. Determine também o ponto de tangência de tal reta.

11) Seja a parábola dada pela função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a; b; c$ são constantes reais, e $a \neq 0$. Suponha que a reta $r: y = \alpha x + \beta$ (onde $\alpha \neq 0$) seja dada. Prove que sempre haverá uma, e apenas uma reta normal ao gráfico de $f(x)$, e paralela à reta r. Determine também o ponto onde a reta normal cruza o gráfico da função.

12) Considere a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Determine, caso existam, retas tangentes ao gráfico da função, tais que essas retas sejam horizontais.

13)
a) Considere a função $f(x) = -x^2 - x - 1$. Determine, caso existam, retas tangentes ao gráfico da função, tais que essas retas passam pela origem.
b) Esboce o ocorrido.

14)
a) Considere a função $f(x) = -x^2 + x + 2$. Determine, caso existam, retas tangentes ao gráfico da função, tais que essas retas passam pela origem.
b) Esboce o ocorrido.

15) Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a; b; c$ são constantes reais, e $a \neq 0$. Determine condições sobre as constantes $a; b; c$ de modo que a parábola admita ao menos uma reta tangente que passe pela origem.

16) Demonstre que se uma função é diferenciável em $\mathbb{R}$, então essa função nunca admitirá reta normal horizontal. Interprete o fato geometricamente.

17) Considere a elipse de equação $16x^2 + 9y^2 = 144$. Determine as equações da reta tangente e da reta normal em cada um dos pontos pedidos:
a) $(0; 4)$
b) $(0; -4)$
c) $(3; 0)$
d) $\left(2; -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$
e) $\left(\frac{3\sqrt{7}}{4}; 3\right)$

18) A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma elipse. Determine o ponto mais alto, o ponto mais baixo, o ponto mais à esquerda e o ponto mais à direita dessa elipse, e use essas informações para fazer um esboço do gráfico dessa elipse.

19) Dada uma circunferência de centro na origem e raio $R > 0$, mostre que a reta normal ao gráfico da circunferência sempre passa pela origem.

20) Dada uma circunferência de centro no ponto $(x_C; y_C)$ e raio $R > 0$, mostre que a reta normal ao gráfico da circunferência sempre passa pelo centro da mesma.

Regra de L'Hôspital

21) Descreva com suas palavras como funciona a regra de L'Hôspital.

22) Seja $\lim\limits_{x\to p} f(x) \cdot g(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$, e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \infty$. Descreva como adaptar a regra de L'Hôspital para aplicar à indeterminação.

23) Seja $\lim\limits_{x\to p} \left(f(x)\right)^{g(x)}$ tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 1$, e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = \infty$. Descreva como adaptar a regra de L'Hôspital para aplicar à indeterminação.

24) Seja $\lim\limits_{x\to p} \left(f(x)\right)^{g(x)}$ tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0^+$, onde 0^+ indica que tende a zero pela direita, e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 0^+$. Descreva como adaptar a regra de L'Hôspital para aplicar à indeterminação.

25) Considere o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
a) Mostre que a regra de L'Hôspital <u>pode</u> ser aplicada.
b) Aplique a regra de L'Hôspital ao limite. Identifique o que acontece.
c) Resolva esse limite.

26) Calcule os limites a seguir: (OBS: Nem sempre usar a regra de L'Hôspital é o melhor caminho)

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{x+2}$
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{2x+8}$
c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2+8x+2}{1-x+x^2-x^3}$
d) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x+4)\cdot(x^2-8)}{(2-5x)\cdot(4-x)\cdot(3x+7)}$
e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+16x^2}}{3x-7}$
f) $\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x}$
g) $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}$
h) $\lim_{x\to\infty} x^k\cdot e^{-x}$, onde $k\in\mathbb{N}$
i) $\lim_{x\to 0^+} xln(x)$
j) $\lim_{x\to 0^+} xln^2(x)$
k) $\lim_{x\to 0^+} xln^k(x)$, onde $k\in\mathbb{N}$
l) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)}$
m) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^2(x)}$
n) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^k(x)}$, onde $k\in\mathbb{N}$
o) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2)}{sen^2(x)}$
p) $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{sen(2x)}$
q) $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)-x}{x^3}$
r) $\lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)\right)}{x^4}$
s) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{x^4}$
t) $\lim_{x\to 0^+} \left(1+sen(x)\right)^{\frac{1}{x}}$
u) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2x}$
v) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln(x)}$
w) $\lim_{x\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$
x) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$
y) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$
z) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{sen(x)}-\frac{1}{tg(x)}\right)$
aa) $\lim_{x\to\infty} \left(\cosh(x)-senh(x)\right)$

27) Utilize a regra de L'Hôspital para confirmar os dois limites fundamentais.

28) Porque não podemos usar a regra de L'Hôspital para deduzir o primeiro limite fundamental?

Incrementos e diferenciais

29) Interprete a fórmula de incrementos, dada por $\Delta f \approx f'(x_0)\cdot\Delta x$ através de retas tangentes, e interprete geometricamente como as aproximações funcionam.

30) Explique por que a aproximação por incrementos é melhor conforme o valor de Δx se aproxima de zero.

31) Através de incrementos, estime o valor de $\sqrt{15}\ldots$

a) …utilizando $x_0 = 16$
b) …utilizando $x_0 = 100$
c) Utilizando um software, verifique qual o erro cometido nos itens anteriores.
d) Através de um gráfico, ilustre o ocorrido.

32) Utilizando incrementos, determine um valor fracionário ou decimal aproximado para os valores pedidos em cada item. Depois, com uma calculadora, verifique o valor exato, e o erro cometido.

a) $\sqrt{82}$
b) $\sqrt{1000}$
c) $\sqrt{3.8}$
d) $\sqrt[3]{65}$
e) $\sqrt[3]{7.7}$
f) $\sqrt[3]{120}$
g) $\sqrt[3]{2000}$
h) $\sqrt[6]{1.3}$
i) $(3.09)^2$
j) $(4.831)^2$
k) π^3
l) $(4.979)^3$
m) $(7.12)^4$
n) $\sin(31^o)$
o) $\cos(43^o)$
p) $tg(123^o)$
q) $\sec\left(\frac{\pi}{7}\right)$
r) $cotg\left(\frac{7\pi}{13}\right)$
s) $arcsen(0.48)$
t) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$
u) $arctg(2)$
v) $\ln(3)$
w) $\log_2(1000)$
x) $\log_\pi 9$
y) $2^{4.1}$
z) $3^{1.98}$
aa) $4^{\sqrt{50}}$
bb) $\frac{1}{8.1}$
cc) $\frac{6}{(2.9)^3}$
dd) $\frac{8}{\sqrt{15.7}}$
ee) $\frac{(0.9)^2}{(1.1)^3}$ (Sugestão: Use a função $f(x) = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^3}$)

33) Imagine um triângulo equilátero, cujos lados medem 8cm cada. Todas as suas arestas são diminuídas em 0.2cm ao mesmo tempo. Através de incrementos, estime a variação:

a) Em seu perímetro.
b) Em sua altura.
c) Em sua área.

34) Imagine um hexágono regular, de arestas iguais a 5cm cada. Todas as suas arestas são aumentadas em 0.1cm ao mesmo tempo. Através de incrementos, estime a variação:

a) Em seu perímetro.
b) Em sua área.

35) Seja um quadrado de arestas iguais a 4cm cada. Deseja-se aumentar a sua área em 3cm². Estime, através de incrementos, em quanto devemos aumentar o tamanho de suas arestas de modo a obter tal aumento na área.

36) Seja um quadrado de arestas iguais a 12cm cada. Deseja-se diminuir a sua diagonal em 1cm. Estime, através de incrementos, em quanto devemos diminuir o tamanho de suas arestas de modo a obter tal diminuição na diagonal.

37) É dado um círculo de raio igual a $10cm$. Vamos construir ao redor desse círculo, um anel circular, que deva ter 2cm² de área. Estime, através de incrementos, a espessura desse anel circular.

38) Imagine um quadrado de aresta igual a x. Estime, através de incrementos, em quanto devemos aumentar o valor dessa aresta para que a sua área seja aumentada em 5%.

39) Imagine uma circunferência de raio igual a x. Estime, através de incrementos, em quanto devemos diminuir o valor do raio dessa circunferência de modo que a sua área diminua em 2%.

40) Seja um cubo de aresta igual a 7cm, dado. Todas as suas arestas são aumentadas em 0.1cm ao mesmo tempo. Através de incrementos, estime a variação:

a) No comprimento de sua diagonal.
b) Em sua área.
c) Em seu volume.

41) Uma esfera de raio igual a 15cm tem o seu raio diminuído em 0.5cm. Estime, através de incrementos a variação:
a) Em sua área.
b) Em seu volume.

42) Um cilindro possui raio da base igual a 4cm, e altura igual a 15cm. Através de incrementos, determine a variação no volume desse cilindro
a) Caso o raio de sua base seja aumentado em 0.2cm.
b) Caso a altura seja diminuída em 0.3cm.

43) Uma esfera teve seu volume medido experimentalmente, onde foi obtido que seu volume é de $V = 4m^3$, com uma margem de erro de $\Delta V = \pm 0.1m^3$. Através de incrementos, estime qual a margem de erro cometida na medição:
a) Do raio dessa esfera.
b) Da área dessa esfera.

44) Deseja-se construir uma antena de altura prevista para 20m. Além disso, ao final da construção da torre, serão colocados quatro cabos (de lados diferentes da antena) de aço ligados ao topo da antena, e esticados até o chão, presos a uma distância de 15m da base da antena cada um. Devido a imprevisibilidades (como a rigidez do solo por exemplo), a antena pode ter uma variação de altura de até 10cm, para mais, ou para menos. Utilizando diferenciais, estime qual a variação de cabo de aço que é acarretada por essa imprevisibilidade na altura da torre.

45) Seja $x \in \mathbb{R}^+$ um número real do qual desejamos aproximar sua raiz quadrada. Seja $y \in \mathbb{N}$ o número natural mais próximo de x que possua raiz quadrada exata. Mostre que, utilizando diferenciais, podemos aproximar o valor da raiz quadrada de x pela expressão $\sqrt{x} \approx \sqrt{y} + \frac{x-y}{2\sqrt{y}}$.

46) Seja $x \in \mathbb{R}^+$ um número real do qual desejamos aproximar sua raiz cúbica. Seja $y \in \mathbb{N}$ o número natural mais próximo de x que possua raiz cúbica exata. Mostre que, utilizando diferenciais, podemos aproximar o valor da raiz cúbica de x pela expressão $\sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{y} + \frac{x-y}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

47) Seja $x \in \mathbb{R}^+$ um número real do qual desejamos aproximar a sua raiz n-ésima. Seja $y \in \mathbb{N}$ o número natural mais próximo de x que possua uma raiz n-ésima exata. Mostre que, utilizando diferenciais, podemos aproximar o valor da raiz n-ésima de x pela expressão $\sqrt[n]{x} \approx \sqrt[n]{y} + \frac{x-y}{\sqrt[n]{y^{n-1}}}$

48) Seja $f(x) = sen(x)$.
a) Demonstre que $f(x+\Delta x) = sen(x) \cdot \cos(\Delta x) + sen(\Delta x) \cdot \cos(x)$
b) Argumente porque, para valores pequenos de Δx, a aproximação $sen(\Delta x) = \Delta x$ é boa.
c) O que acontece com $\cos(\Delta x)$ quando o valor de Δx é pequeno?
d) Utilizando os itens anteriores, explique algebricamente o significado da fórmula de incremento para a função seno, dada por $sen(x+\Delta x) \approx \mathrm{sen(x)} + \cos(x) \cdot \Delta x$.

49) Seja $f(x) = \cos(x)$
a) Demonstre que $f(x+\Delta x) = \cos(x) \cdot \cos(\Delta x) - \mathrm{sen(x)} \cdot \mathrm{sen}(\Delta \mathrm{x})$
b) Utilizando o argumento análogo ao do exercício anterior, explique algebricamente o significado da fórmula de incremento para a função cosseno, dada por $\cos(x+\Delta x) \approx \cos(x) - sen(x) \cdot \Delta x$

Taxas de variação

50) Interprete, com suas palavras, como uma derivada pode ser tratada como taxa de variação, para uma função genérica $f(x)$.

51) Seja $S(t)$ uma função que determina o espaço S em função do tempo t. O que significa fisicamente $\frac{dS}{dt}$?

52) Seja $V(t)$ uma função que determina a velocidade V em função do tempo t. O que significa fisicamente $\frac{dV}{dt}$?

53) Seja $a(t)$ uma função que determina a aceleração a em função do tempo t. O que significa fisicamente $\frac{da}{dt}$?

54) Seja $Q(t)$ uma função que determina a quantidade de movimento de um corpo em função do tempo t. O que significa fisicamente $\frac{dQ}{dt}$?

55) Seja $V(P)$ uma função que determina o volume V de um gás perfeito em função da pressão P aplicada sobre ele. O que significa fisicamente $\frac{dV}{dP}$?

56) Seja $B(I)$ uma função que descreva o campo magnético B gerado por uma corrente induzida I. O que significa fisicamente $\frac{dB}{dI}$?

57) Seja $V(R)$ uma função que determina o volume de uma esfera V em função do raio R. O que significa fisicamente $\frac{dV}{dR}$?

58) Dê um exemplo de uma grandeza física que pode ser representada como taxa de variação, que não seja um dos exemplos anteriores.

59) Em cinemática, um movimento pode ser classificado referente a sua velocidade como progressivo ou retrógrado, e em relação a sua aceleração pode ser classificado como acelerado ou retardado. Descreva como isso pode ser feito em relação a derivadas.

60) Um corpo no espaço de acordo com a equação horária dos espaços $S(t) = \frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 42t$, onde t é medido em horas, e S em quilômetros.

a) Determine a equação horária das velocidades para esse corpo.
b) Determine a equação horária das acelerações para esse corpo.
c) Determine em quais intervalos de tempo o movimento é progressivo, e em quais momentos ele é retrógrado (ou seja, determine em quais instantes a sua velocidade é positiva, e em quais instantes a velocidade é negativa).
d) Determine em quais intervalos de tempo o movimento é acelerado, e em quais momentos ele é retardado (ou seja, determine em quais momentos sua velocidade aumenta ou diminui em módulo).
e) Utilize essas informações para esboçar o gráfico de deslocamento por tempo para esse movimento.

Taxas relacionadas

61) Explique com suas palavras o conceito de taxas relacionadas, através da regra da cadeia para diferenciação.

62) Imagine uma circunferência de raio R, raio este que está variando a uma taxa constante igual a α. Determine, em função dos parâmetros R e α:

a) A taxa de variação do perimetro da circunferência.
b) A taxa de variação da área dessa circunferência.

63) Uma esfera de raio 75cm tem o seu raio aumentado à velocidade de 1cm/s.

a) Determine a taxa de variação da área dessa esfera nesse momento.
b) Determine a taxa de variação do volume da esfera nesse momento.

64) Uma grande bola de sorvete de raio 8cm está derretendo à taxa de 2mℓ/s.

a) Determine a taxa de variação do raio dessa bola de sorvete no início do problema.
b) Determine a taxa de variação do raio dessa bola de sorvete quando o raio dessa bola for de 6cm, 4cm e 2cm.
c) Os resultados encontrados fazem sentido com o problema real? Justifique.

65) Um funil cônico de raio da base igual a 20cm e altura igual a 30cm está cheio de um líquido, que escoa à razão de 12mℓ/s.

a) Determine a velocidade com que a altura do líquido diminui no início do problema.
b) Determine a velocidade com que a altura do líquido diminui quando a altura se reduz à um terço da altura inicial.
c) Determine a velocidade com que o raio da base varia no início do problema.

66) Imagine um cubo de aresta a cujo volume aumente à razão constante α. Determine, em função de a e α:

a) A taxa de variação do volume desse cubo.
b) A taxa de variação da área desse cubo.
c) A taxa de variação da medida da diagonal desse cubo.

67) Imagine um cone equilátero de raio da base R, cujo volume aumente à razão α, constante. Determine, em função de R e α:

a) A taxa de variação do raio da base desse cone.
b) A taxa de variação da altura desse cone.
c) A taxa de variação da área da base desse cone.

68) Ar é injetado com razão constante de $60m\ell/s$ em um balão esférico, inicialmente vazio. Depois de um minuto, determine:

a) O volume desse balão.
b) O raio desse balão.
c) A velocidade na qual o raio do balão aumenta (em cm/s)
d) A área do balão.
e) A velocidade na qual a área do balão aumenta (em cm^2/s)

69) Um cubo de aresta igual a 1m aumenta de tamanho devido à expansão térmica. Imagine que a sua aresta aumente na razão de $5mm/°C$.

a) Determine a taxa na qual a área de uma de suas faces varia.

b) Determine a taxa na qual o seu volume varia.

c) Isso condiz com o que você aprendeu no ensino médio sobre dilatação térmica?

70) Uma escada de 15m de comprimento está apoiada em uma parede vertical, a uma distância de 9m do chão. O ponto no qual a escada está apoiada no chão começa a escorregar, afastando-se da parede, com velocidade de 3cm/s.

a) Determine a expressão que calcule a velocidade com a qual o ponto de apoio da escada na parede desce, em função da distância horizontal "x" entre a escada e a parede.

b) Determine a expressão que calcule a aceleração com a qual o ponto de apoio da escada na parede desce, em função da distância horizontal "x" entre a escada e a parede.

c) Determine a expressão que calcule o ângulo formado entre a escada e o chão em função da distância horizontal "x" entre a escada e o chão.

d) Determine a expressão que calcule a velocidade com que esse ângulo varia em função da distância horizontal "x" entre a escada e o chão.

e) Como seriam as respostas dos itens anteriores, caso o exercício pedisse que os cálculos fossem feitos em função do tempo, ao invés da distância?

71) Um cubo tem arestas de tamanho que varia com o tempo, de acordo com a expressão $a(t) = 40 + 10sen\left(\frac{7\pi t}{6}\right)$.

a) Determine a velocidade com a qual a aresta varia, em função do tempo t.

b) Determine a velocidade na qual o volume varia, quando t = 2s.

72) Um barril cilíndrico de diâmetro da base igual a 80cm contém 40ℓ de chopp, que é servido através de uma válvula, cuja vazão é de 45mℓ/s.

a) Argumente fisicamente porque o raio não varia.

b) Mostre que a velocidade na qual a altura do chopp dentro do barril diminui é constante, e calcule o seu valor.

Otimização (Máximos e mínimos)

73) Para cada uma das funções a seguir, determine os seus pontos críticos, e determine se esses pontos serão pontos de máximos, mínimos, ou nenhum deles.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 8$

b) $f(x) = -3x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = x^3 - x$

d) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 22$

e) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 108x - 101$

f) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

g) $f(x) = x^5 + 8x^2$

h) $f(x) = x^6 - x^2$

i) $f(x) = \frac{1}{x+4}$

j) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

k) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

l) $f(x) = e^{x^2-5x+6}$

m) $f(x) = arctg(x^2)$

n) $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 4)$

o) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 4)$

p) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

74) Considere uma função de primeiro grau genérica, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, onde $a \neq 0$. Demonstre que essa função não possui nenhum ponto crítico.

75) Considere uma função de segundo grau genérica, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$.

a) Demonstre que essa função sempre terá um único ponto crítico.

b) Determine, em função dos coeficientes a, b, c se esse ponto crítico será máximo ou mínimo.

c) Encontre as coordenadas do ponto crítico. Compare com a conhecida fórmula de vértice de parábola, aprendida no ensino médio.

76) Mostre que as funções $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ possuem um número infinito de pontos críticos.

77) Mostre que qualquer função da forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$, com $a > 0, a \neq 1$, não possui pontos críticos.

78) Considere uma função de terceiro grau genérica, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$.

a) Determine, em função dos coeficientes a, b, c, d, se e quantos pontos críticos a função possui.

b) Demonstre que, para o caso em que a função possui exatamente dois pontos críticos, então um deles deverá ser obrigatoriamente ponto de máximo, e o outro ponto de mínimo.

79) Dentre todos os retângulos de perímetro 100m, determine o de área máxima.

80) Decomponha o número 36 como soma de dois números cujo produto é mínimo.

81) Decomponha o número 36 como produto de dois números cuja soma é máximo.

82) Dê as medidas do triângulo retângulo de perímetro 50m que possua a maior área possível.

83) Seja x um número real positivo. Determine o valor de x de modo que a soma de x com seu inverso seja a menor possível.

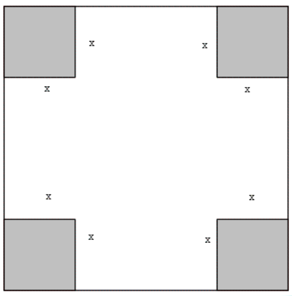
84) O senhor Silva deseja fazer um cercado com formato retangular para o seu querido cachorro de estimação, ao lado de sua casa. Ele dispõe de 60m de tela para fazer o cercado, e, como o cercado está ao lado de sua casa, ele irá utilizar o muro de sua própria casa como um dos lados da área para o cachorro, ou seja, ele precisará cercar apenas os três lados com a tela. Determine as dimensões do cercado de modo que o cachorro tenha a maior área possível para ficar confortável.

85) Um arame de 1,2m de comprimento será dividido em duas partes. Uma delas será dobrada para formar um triângulo equilátero, e outra será dobrada para formar um hexágono regular.

a) Determine como deve ser feita a divisão para que as somas das áreas do triângulo e do hexágono seja a menor possível.

b) Determine como deve ser feita a divisão para que as somas das áreas do triângulo e do hexágono seja a maior possível.

86) Veja a figura a seguir:



Essa figura representa uma folha de papel quadrada, de lado a, do qual são recortados quadrados menores, de lado x nos quatro cantos. Após isso, a folha restante (que está em branco no desenho), é dobrada, e os lados iguais de um quadrado recortado são unidos perpendicularmente à folha, de modo a formar um paralelepípedo reto retângulo (sem tampa).

Determine o valor de x em função de a de modo que o volume seja o maior possível.

87) Como ficaria o exercício anterior, se a folha de papel inicial for retangular, com medidas a por $2a$?

88) Ainda explorando o mesmo exercício, e se a base fosse uma folha retangular com medidas a por $\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$? (: Curiosidade, essas são as proporções de uma folha sulfite A4)

89) Considerando os exercícios anteriores para um caso geral, qual valor de x fornece o valor máximo para o volume do paralelepípedo, se a base inicial possui medidas a e $p \cdot a$, onde p é uma constante de proporcionalidade.

90) Qual dos pontos do gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x - 14$ é o mais próximo da origem?

91) Considere os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x - 5$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = -2x^2 + 3x - 2$. Determine qual a menor distância vertical entre os gráficos das duas funções, e em que ponto isso ocorre.

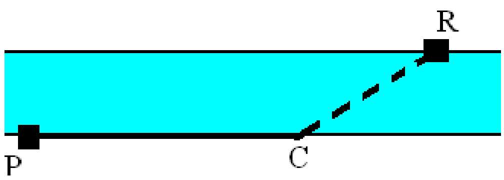
92) Dentre todos os pontos da circunferência $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$, determine o mais próximo do ponto $(3, 2)$.

93) Dentre todos os cones retos de volume igual a 4π, determine as dimensões do que possuem área total mínima.

94) Dentre todos os cilindros retos de volume igual a 54π, determine as dimensões do que possui área total mínima.

95) Dentre todas as pirâmides de base quadrada e volume igual a 2, determine a aresta da base da que possui área total mínima.

96) Considere a figura a seguir:



Na figura está representado um rio, de margens paralelas e distantes 5km entre si, na qual um oleoduto será construído para transportar petróleo, de uma produtora P até uma refinaria localizada em R, cuja distância horizontal da produtora é 20Km.

O oleoduto será construído em dois trechos. O primeiro, terrestre, liga P à um ponto C, o segundo, pela água, liga C à R.

Admita que o preço da construção da tubulação por quilômetro construído pela água seja duas vezes mais cara que a construção por terra. Determine a distância entre P e C que minimize o custo total de produção do oleoduto.

97) Refaça o exercício anterior, admitindo agora que o preço de construção da tubulação por quilômetro construído pela água seja α vezes mais caro que a construção por terra. (OBS: A resposta deve ser em função de α)

98) Uma lata cilíndrica com tampa deve ser construída de modo que o seu volume interno total deva ser de V unidades de volume. Suponha que o material utilizado na lateral seja α vezes mais caro do que o material utilizado para a construção da base e da tampa (por unidade de área). Determine as dimensões da base e da altura desse cilindro, em função de V e α que minimizem a área total do cilindro.

Esboço de gráficos de funções reais

99) Faça um resumo/roteiro sobre como esboçar gráficos de funções reais.

100) Interprete geometricamente as fórmulas de assíntotas de gráficos.

101) Demonstre que se $f(x)$ possuir uma assíntota horizontal à direita, então $f(x)$ não pode assumir uma assíntota oblíqua à direita.

102) Explique porque só podemos ter assíntotas verticais quando há pontos fora do domínio da função.

103) Interprete geometricamente o significado da derivada primeira de uma função.

104) Interprete geometricamente o significado da derivada segunda de uma função.

105) Dê um exemplo de uma função tal que $f'(a) = 0$, mas a não é ponto nem de máximo, nem de mínimo.

106) Dê um exemplo de uma função tal que $f''(a) = 0$, mas a não é ponto de inflexão.

107) Faça um esboço dos gráficos das funções a seguir, determinando domínio, crescimento, pontos críticos, concavidades, inflexões, assíntotas.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 1$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

j) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

k) $f(x) = \frac{2x+4}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$

m) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$

n) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$

o) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}$

p) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

q) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

r) $f(x) = e^{-x^2}$

s) $f(x) = xe^x$

t) $f(x) = e^{2x} - e^x$

u) $f(x) = senh(x)$

v) $f(x) = \cosh(x)$

w) $f(x) = tgh(x)$

x) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

y) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

z) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$

aa) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$