Cálculo 1 – Lista 04

Derivadas

Professor: Daniel Henrique Silva

Definições de derivada

1) Defina a derivada de uma função em um ponto p.

2) Interprete a definição de derivada através de retas tangentes.

3) Justifique geometricamente a necessidade de uma função ser contínua para poder ser diferenciável.

4) Explique porque a função fatorial não é diferenciável.

5) Calcule, através da definição de derivadas, as derivadas das funções $f(x)$ dadas, nos pontos p pedidos. (Lembrando que a derivada pode não existir, e isso é uma resposta possível).

a) $f(x) = 3;\ p = -1$
b) $f(x) = x + 1;\ p = 3$
c) $f(x) = 3x - 7; p = 0$
d) $f(x) = 5 - 6x; p = 4$
e) $f(x) = x^2; p = 1$
f) $f(x) = 2x^2 - 5x + 6; p = 2$
g) $f(x) = x^3; x = -1$
h) $f(x) = x^3 - x; p = 0$
i) $f(x) = \sqrt{x}; p = 9$
j) $f(x) = \sqrt{3x-2}; p = 2$
k) $f(x) = \sqrt[3]{x}; p = -8$
l) $f(x) = x + 2\sqrt[3]{x+1}; p = 0$
m) $f(x) = \frac{1}{x}; p = 1$
n) $f(x) = \frac{1}{3x-1}; p = 2$
o) $f(x) = -\frac{4}{x^2}; p = -2$
p) $f(x) = sen(x); p = 0$
q) $f(x) = sen(2x); p = \frac{\pi}{4}$
r) $f(x) = \cos(x); p = -\frac{\pi}{3}$
s) $f(x) = 3\cos(x); p = \frac{5\pi}{6}$
t) $f(x) = e^x; p = 0$
u) $f(x) = \ln(x); p = 1$
v) $f(x) = |x|; p = 0;$
w) $f(x) = |x^2 - 1|; p = 0$
x) $f(x) = |x^2 - 1|; p = 1$
y) $f(x) = x \cdot |x|; p = 0$
z) $f(x) = x \cdot |x|; p = 1$

6) Seja $f: A \to \mathbb{R}, f(x)$ uma função real. Defina a função derivada, $f'(x)$.

7) Demonstre que os limites $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ e $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ são equivalentes.

8) Calcule, através da definição de derivadas, as derivadas das funções a seguir em seus respectivos domínios:

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 5$
c) $f(x) = \lambda$, onde λ é uma constante real qualquer.
d) $f(x) = x$

e) $f(x) = 3x - 4$
f) $f(x) = \sqrt{3} - \pi x$
g) $f(x) = \alpha x + \beta$, onde α e β indicam constantes reais quaisquer.
h) $f(x) = x^2$
i) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$
j) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, onde $\alpha; \beta$ e γ indicam constantes reais quaisquer.
k) $f(x) = x^3$
l) $f(x) = 4x^2 - 2x + x^3 - 2$
m) $f(x) = \sqrt{x}$
n) $f(x) = \sqrt{6x + 2}$
o) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
p) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$
q) $f(x) = \frac{1}{x}$
r) $f(x) = \frac{1}{x-4}$
s) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$
t) $f(x) = \frac{1}{\alpha x+\beta}$, onde α e β indicam constantes reais quaisquer.
u) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
v) $f(x) = \frac{1}{2x^2}$
w) $f(x) = sen(x)$
x) $f(x) = 3sen(x)$
y) $f(x) = sen(2x)$
z) $f(x) = \cos(x)$
aa) $f(x) = -5\cos(x)$
bb) $f(x) = \cos(2x)$
cc) $f(x) = e^x$
dd) $f(x) = e^{2x}$
ee) $f(x) = 2^x$
ff) $f(x) = \ln(x)$

9) Dê um exemplo de uma função contínua, mas não diferenciável em algum ponto qualquer.

10) Dê um exemplo de uma função contínua, mas não diferenciável no ponto $p = \sqrt{7}$

11) Considere a função dada por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & se\ x < 1 \\ x^2, & se\ 1 \leq x < 2 \\ 6 - x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Faça um esboço do gráfico dessa função
b) Mostre que a função é contínua em $\mathbb{R}$.
c) Essa função é diferenciável em $x = 1$? Caso seja, qual o valor de $f'(1)$?
d) Essa função é diferenciável em $x = 2$? Caso seja, qual o valor de $f'(2)$?

12) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |sen(\pi x)|$
a) Esboce o gráfico dessa função.
b) Mostre que essa função é contínua em $\mathbb{R}$
c) Mostre que essa função não é diferenciável em $\mathbb{Z}$

Cálculos de derivadas através de regras de derivação

13) Complete a tabela de derivadas "básicas" a seguir, onde λ é uma constante real qualquer dada, e $g(x)$ é uma função supostamente diferenciável. Caso necessário, indique a derivada da função $g(x)$ por $g'(x)$.

OBS: Algumas derivadas serão exploradas mais adiante. Faça o que puder dessa tabela, e volte depois de ter estudado outros tópicos para complementar o restante.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
0		λ		x	

x^2		x^3		$\sqrt{x}$	
$\sqrt[3]{x}$		$\frac{1}{x}$		$\frac{1}{x^2}$	
x^n		$sen(x)$		$sen(\lambda x)$	
$\cos(x)$		$\cos(\lambda x)$		$tg(x)$	
$tg(\lambda x)$		$\sec(x)$		$\sec(\lambda x)$	
$cossec(x)$		$cossec(\lambda x)$		$cotg(x)$	
$cotg(\lambda x)$		e^x		$e^{\lambda x}$	
λ^x		$\ln(x)$		$\ln(\lambda x)$	
$\log_\lambda(x)$		$\left(g(x)\right)^n$		$g(x^n)$	
x^x		$\left(g(x)\right)^x$		$x^{g(x)}$	
$sen\left(g(x)\right)$		$g\left(sen(x)\right)$		$\cos\left(g(x)\right)$	
$g(\cos(x))$		$tg\left(g(x)\right)$		$g\left(tg(x)\right)$	
$\sec\left(g(x)\right)$		$g(\sec(x))$		$cossec\left(g(x)\right)$	
$g\left(cossec(x)\right)$		$cotg\left(g(x)\right)$		$g\left(cotg(x)\right)$	
$arcsen(x)$		$\mathrm{arcsen}(\lambda x)$		$\mathrm{arccos}(x)$	
$\mathrm{arccos}(\lambda x)$		$arctg(x)$		$arctg(\lambda x)$	
$\mathrm{arcsec}(x)$		$\mathrm{arcsec}(\lambda x)$		$arccossec(x)$	
$arccossec(\lambda x)$		$arccotg(x)$		$arccotg(\lambda x)$	

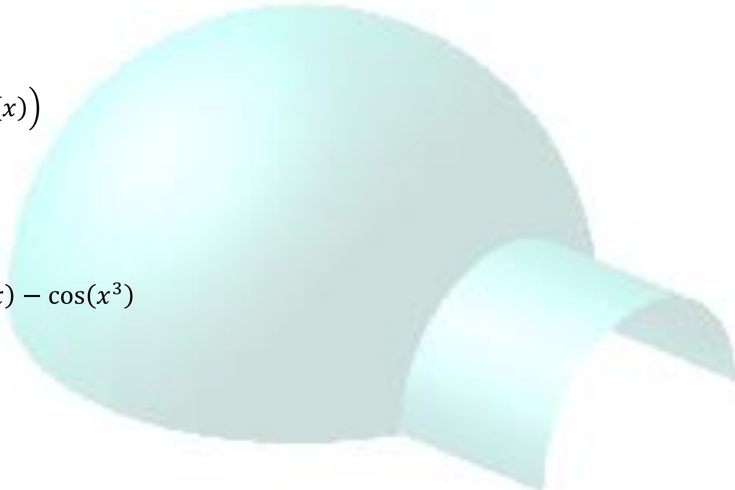
14) Sejam $f(x); g(x); h(x)$ três funções diferenciáveis, e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ duas constantes reais não-nulas. Escreva, em função das funções dadas, de suas derivadas, e das constantes:

a) $\left(f(x) + g(x)\right)'$
b) $\left(f(x) - g(x)\right)'$
c) $\left(f(x) + \alpha \cdot g(x) + \beta \cdot h(x)\right)'$
d) $\left(\alpha \cdot \left(f(x) - g(x) + h(x)\right) - \beta\left(f(x) + g(x) - h(x)\right)\right)'$
e) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)'$
f) $\left(f(x) \cdot g(x) + h(x)\right)'$
g) $\left(f(x) \cdot \left(\alpha \cdot g(x) + \beta \cdot h(x)\right)\right)'$
h) $\left(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\right)'$
i) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

j) $\left(\frac{\frac{\alpha}{f(x)}}{\frac{g(x)}{h(x)}}\right)'$
k) $\left(\frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right)'$
l) $\left(\frac{f(x)}{\alpha\cdot g(x)-\beta\cdot h(x)}\right)'$
m) $\left(\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}+\frac{h(x)}{f(x)-g(x)}\right)'$
n) $\left(\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}\right)'$
o) $\left(\frac{f(x)}{g(x)\cdot h(x)}\right)'$
p) $\left(f\big(g(x)\big)\right)'$
q) $\left(f(x+\alpha)\right)'$
r) $\left(f(\alpha\cdot x)\right)'$
s) $\left(f\big(\alpha\cdot g(x+\beta)\big)\right)'$
t) $\left(f\left(g\big(h(x)\big)\right)\right)'$
u) $\left(f(\alpha\cdot x)\cdot\frac{g(x)}{h(x)}\right)'$
v) $\left(f\big(g(x)\cdot h(x)\big)\right)'$
w) $\left(\frac{f(x)}{g\big(h(x)\big)}\right)'$
x) $\left(\frac{f\big(g(x)\big)}{g\big(f(x)\big)}\right)'$
y) $\left(f\big(g(x)\big)\cdot g\big(h(x)\big)\cdot h\big(f(x)\big)\right)'$
z) $\left(\frac{\alpha}{f\big(g(x)\big)-h\big(f(x)\big)}\right)'$
aa) $\left(f(x)^{g(x)}\right)'$
bb) $\left(\big(f(x)\cdot g(x)\big)^{h(x)}\right)'$
cc) $\left(\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)}\right)$
dd) $\left(f(x)^{g(x)\cdot h(x)}\right)'$
ee) $\left(f(x)^{g(x)^{h(x)}}\right)'$

15) Calcule as derivadas das funções a seguir, através das regras de derivação:
a) $1983^{22\sqrt{12}}$
b) $\sqrt{tg(300)+7^{4.55}-\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{6}}}$
c) $\pi x+\sqrt{\ln(2)}$
d) $2x^2+6x-7$
e) $4x^6-6x^4+18x$
f) $\cos(x)-e^x+x^5$
g) $sen(x)+3tg(x)-cotg(x)$
h) $\log_3(x)$
i) 2^x+x^2
j) $cossec(x)+\sqrt[3]{14x^5}$
k) $\sqrt[5]{x^8}+\sqrt[8]{x^5}$
l) $\frac{e^x+x^3}{\pi}$
m) $\frac{x^3+4x^2-13x+8}{x^2}$
n) $x^\pi+e^x+\pi^x-e^\pi$
o) $(2x+3)^2$
p) $(4x^2-8)^3$
q) $(x-20)^{100}$
r) $(x+2)\cdot(3x^2+2x)$
s) $(4x^2-11x+13)\cdot(x^3+8)$
t) $sen(x)\cdot\cos(x)$

u) $\frac{sen(2x)}{2}$
v) $x^3 \cdot tg(x)$
w) $x^e \cdot e^x$
x) $\sec(x) \cdot cossec(x)$
y) $sen(x) \cdot \sec(x)$
z) $sen(x) \cdot \cos(x) \cdot tg(x)$
aa) $\ln(x) \cdot \ln(4x)$
bb) $x^2 \cdot \ln(x)$
cc) $x \cdot e^x \cdot \cos(x)$
dd) $\ln(x) \cdot \mathrm{tg(x)} \cdot \sqrt{\mathrm{x}}$
ee) $x \cdot \log_3(x) \cdot \cos(x) \cdot \sec(x)$
ff) $x^2 sen(x) - xe^{4x}$
gg) $\frac{x}{sen(x)}$
hh) $\frac{tg(x)}{\cos(x)}$
ii) $\frac{e^x+x^2}{\cos(x)}$
jj) $\frac{\sqrt{x}}{x-tg(x)}$
kk) $x^3 + \frac{\sqrt{x}}{e^x}$
ll) $\frac{x^3-4x}{x^2+6x+8}$
mm) $\frac{x^2 \cdot e^x}{\cos(x)}$
nn) $x \cdot sen(x) - \frac{tg(x)}{\sqrt{6x}}$
oo) $\frac{\left(\frac{x}{e^x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2^x}\right)}$
pp) $e^x \left(\frac{x}{\cos(x)} - x^2 \ln(x)\right)$
qq) $\sqrt{sen(x)}$
rr) $sen\left(\sqrt{x}\right)$
ss) $\ln(\cos(x)) + 3$
tt) $\sqrt{\cos(x) - e^{2x}}$
uu) $\cos^3(x) + 3\cos(x) - \cos(x^3)$
vv) $x \cdot \sqrt{x^3 - 8}$
ww) $tg^4(x^6)$
xx) $\cos(xe^x)$
yy) $e^x \sqrt{x \cdot sen(x)}$
zz) $\sqrt{x^3 + \sqrt{\cos(3x)}}$
aaa) $\frac{(sen^3(e^x)+\cos^3(e^x))}{tg(3x)}$
bbb) $\frac{e^{2x^2}+4x-\cos(4x)}{\sqrt{tg(3x)}}$
ccc) $tg\left(\ln\left(\sqrt{e^{x^4}}\right)\right)$
ddd) $\ln\left(e^x . cos\left(\sqrt{\frac{ln(x)}{x^3}}\right)\right)$
eee) $\sqrt[3]{x^3 + \sqrt[4]{x^4 + \sqrt[5]{x^5 + 1}}}$
fff) $tg\left(\sqrt[3]{x^3 . \frac{e^{x^2}}{\ln(3\, cos(x))}} + \cos^4(\sec(x^4 + 8e^x)) + 4\cos^3(e^{3x})\right)$
ggg) x^x
hhh) $x^{sen(x)}$
iii) $sen(x^x)$
jjj) $sen^x(x)$
kkk) x^{x^x}
lll) $\sqrt[x]{\cos(x)}$
mmm) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$



nnn) $\left(\frac{\sqrt{x}.\cos(3x)}{sen(2x)}\right)^{e^x}$

Funções hiperbólicas

16) Partindo das definições $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, desenvolva, em função de exponenciais, as funções:
   a) $tgh(x)$
   b) $\operatorname{sech}(x)$
   c) $cossech(x)$
   d) $cotgh(x)$

17) Demonstre que $\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

18) Demonstre que $tgh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

19) Demonstre que $cotgh^2(x) - cossech^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

20) Escreva as funções trigonométricas hiperbólicas inversas a seguir em função de logaritmos e polinômios:
   a) $arcsenh(x)$
   b) $\operatorname{arccosh}(x)$
   c) $arctgh(x)$
   d) $\operatorname{arcsech}(x)$
   e) $arccossech(x)$
   f) $arccotgh(x)$

21) Demonstre que $arctgh\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \ln(x)$

22) Mostre as seguintes igualdades:
   a) $senh(2x) = 2senh(x)\cosh(x)$
   b) $\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1$
   c) $senh(x) - senh(y) = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) senh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
   d) $\cosh(x) - \cosh(y) = 2senh\left(\frac{x+y}{2}\right) senh\left(\frac{x-y}{2}\right)$

23) Simplifique as expressões:
   a) $senh(arcsenh(x))$
   b) $senh(\operatorname{arccosh}(x))$
   c) $senh(arctgh(x))$
   d) $\cosh(arcsenh(x))$
   e) $\cosh(arccosh(x))$
   f) $\cosh(arctgh(x))$
   g) $tgh(arcsenh(x))$
   h) $tgh(\operatorname{arccosh}(x))$
   i) $tgh(arctgh(x))$
   j) $\operatorname{sech}(arctgh(x))$
   k) $tgh(\operatorname{arcsech}(x))$

24) Deduza das derivadas das funções trigonométricas hiperbólicas. (Sugestão: complemente a sua tabela de derivadas básicas acrescentando as respostas dessa questão!)
   a) $senh(x)$
   b) $\cosh(x)$
   c) $tgh(x)$
   d) $\operatorname{sech}(x)$
   e) $cossech(x)$
   f) $cotgh(x)$

Derivadas de funções inversas

25) Seja $f: A \to B, f(x)$ uma função invertível, cuja inversa é dada pela função $f^{-1}(x)$. Mostre que a derivada dessa função é dada por $\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, em pontos onde $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$

26) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 8}{7}$

a) Demonstre que essa função é invertível.

b) Calcule explicitamente a função $f^{-1}(x)$, e faça sua derivada.

c) Calcule a derivada de sua função inversa, através da fórmula de diferenciação de funções inversas. Compare o resultado com o item anterior.

27) Deduza as derivadas das funções a seguir, utilizando cálculos de derivadas de funções inversas:

a) $arcsen(x)$
b) $\arccos(x)$
c) $arctg(x)$
d) $\text{arcsec}(x)$
e) $arccossec(x)$
f) $arccotg(x)$
g) $arcsenh(x)$
h) $\text{arccosh}(x)$
i) $arctgh(x)$
j) $\text{arcsech}(x)$
k) $arccossech(x)$
l) $arccotgh(x)$

Derivadas implícitas

28) Defina função implícita

29) Considere a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = 25$.

a) Mostre que essa circunferência pode ser escrita como união de duas funções explícitas.

b) Calcule a derivada implícita $\frac{dy}{dx}$ dessa função.

c) Utilizando as expressões do item a), derive explicitamente as funções obtidas, e compare o resultado com o item anterior.

30) Considere a função dada implicitamente por $x^2 - xy + y^2 = 1$.

a) Mostre que essa função pode ser escrita explicitamente como união das funções $y = \frac{x+\sqrt{4-3x^2}}{2}$ e $y = \frac{x-\sqrt{3x^2-4}}{2}$

b) Calcule a derivada implícita $\frac{dy}{dx}$ dessa função.

c) Utilizando as expressões dadas no item a), derive explicitamente as funções, e compare o resultado com o item anterior.

31) Em todos os itens a seguir, estão representadas funções implícitas, onde a variável y depende da variável x. Determine, para cada item, a derivada implícita $\frac{dy}{dx}$.

a) $x^2 + y^2 = 1$
b) $x^2 + xy + y^2 = 1$
c) $x^2 + 4xy + y^3 = 1$
d) $xy^2 - x^2y = 2$
e) $xy + x^2y^2 + x^3y^3 = 0$
f) $4x^3 - 3x^2y^2 + 4y^3 = 1$
g) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1} = 2$
h) $x + y - \sqrt{xy} = 1$
i) $\sqrt{xy^3} + \sqrt{x^3y} = 4$
j) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$
k) $\frac{x^2y^2}{x-3y} = 1$
l) $\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$
m) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2y^2+1} = 2$
n) $\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 1 - 3x^3y$
o) $x^y + y^x = 0$

p) $sen(xy) + x^2y^2 = 0$
q) $ycos(x) = xsen(y)$
r) $\frac{sen\left(\frac{x}{y}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{2}$
s) $x^2ycos(y) = \sqrt{x^2+3}$
t) $e^{xy} - x^2 - y^2 = \frac{1}{xy}$
u) $\frac{\ln(x^4+4y^2)}{\sqrt{\cos(xy)}} = 1$