# Cálculo 1 - Lista 03

# Limites

## Professor: Daniel "Pinguim"

### Definições intuitivas iniciais

1) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = 4x - 3$
   a) Dê o domínio máximo possível para essa função.
   b) Faça um esboço do gráfico da função $f(x)$.
   c) Calcule o valor de $f(1), f(1.5), f(1.8), f(1.9), f(1.99), f(1.999), f(2.001), f(2.01), f(2.1), f(2.2), f(2.5), f(3)$
   d) Estime um valor para $\lim_{x \to 2} f(x)$.

2) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{2x - 2}$
   a) Dê o domínio máximo possível para essa função.
   b) Faça um esboço do gráfico da função (utilize software se for necessário)
   c) Calcule o valor de $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(0.9999), f(1.0001), f(1.001), f(1.01), f(1.1)$
   d) Estime um valor para $\lim_{x \to 1} f(x)$.

3) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   a) Dê o domínio máximo possível para essa função.
   b) Faça um esboço do gráfico da função (utilize software se for necessário)
   c) Calcule o valor de $f(-0.1), f(-0.01), f(-0.001), f(-0.0001), f(-0.00001), f(0.00001), f(0.0001),$ $, f(0.001), f(0.01), f(0.1)$.
   d) Estime um valor para $\lim_{x \to 0} f(x)$.

4) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & se\ x \leq 3 \\ x + 2, & se\ x > 3 \end{cases}$
   a) Dê o domínio máximo possível para essa função.
   b) Faça um esboço do gráfico da função (utilize software se for necessário)
   c) Calcule o valor de $f(2.9), f(2.99), f(2.999), f(2.9999), f(3.0001), f(3.001), f(3.01), f(3.1)$
   d) Estime um valor para $\lim_{x \to 3} f(x)$

5) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & se\ x \leq 1 \\ x^2, & se\ x > 1 \end{cases}$
   a) Dê o domínio máximo possível para essa função.
   b) Faça um esboço do gráfico da função (utilize software se for necessário)
   c) Calcule o valor de $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(0.9999), f(1.0001), f(1.001), f(1.01), f(1.1)$
   d) Estime um valor para $\lim_{x \to 1} f(x)$.

### Definições formais de limite

6) Defina vizinhança de um ponto em $\mathbb{R}$.

7) Defina ponto de acumulação de um conjunto real.

8) Determine os pontos de acumulação dos conjuntos dados:

   a) $A = [2; 5]$   b) $A = ]-1; 0]$   c) $A = ]-2; 2[$   d) $A = \{0; 3\}$   e) $\mathbb{R} - \{4\}$

9) Seja o conjunto dado por $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
   a) Descreva esse conjunto.
   b) Mostre que $0 \notin A$.
   c) Mostre que $0$ é um ponto de acumulação desse conjunto.
   d) Mostre que nenhum ponto de $A$ é ponto de acumulação do próprio conjunto.

10) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$.

a) Determine o domínio máximo dessa função.
b) Determine o conjunto dos pontos de acumulação do domínio dessa função.

11) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$.

a) Determine o domínio máximo dessa função.
b) Determine o conjunto dos pontos de acumulação do domínio dessa função.

12) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\log_2(4-x)}{x}$

a) Determine o domínio máximo dessa função.
b) Determine o conjunto dos pontos de acumulação do domínio dessa função.

13) Dê a definição formal de limite de uma função $f(x)$ para quando $x$ tende a $p$, onde $p$ é um ponto de acumulação do domínio de $f(x)$.

14) Interprete com suas palavras a definição formal de limite. Faça também um desenho representando as interpretações geométricas de $\varepsilon$ e $\delta$ para um caso em que o limite existe.

15) Faça agora um desenho representando as interpretações geométricas de $\varepsilon$ e $\delta$ para um caso em que o limite não existe. (Não é necessário pensar em uma função algébrica que faça isso)

16) Porque é importante que $p$ seja um ponto de acumulação do domínio da função para que o limite possa ser calculado?

17) É necessário que uma função esteja definida em $p$ para que $\lim_{x \to p} f(x)$ exista?

## Demonstrando limites pela definição

18) Considere a função constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = C$, onde $C$ é uma constante real qualquer. Demonstre, através da definição formal de limites, que $\lim_{x \to p} f(x) = C$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

19) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to 3} x + 4 = 7$.

20) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to -2} \frac{4-3x}{5} = 2$.

21) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2$.

22) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$, onde $f(x) = \begin{cases} 4, & se\ x < 2 \\ 1, & se\ x > 2 \end{cases}$

23) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

24) Demonstre, através da definição formal de limites que $\lim_{x \to p} f(x) = \nexists$, onde $f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

## Calculando limites

25) Diga se as propriedades a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to p}\big(f(x) + g(x)\big) = L_1 + L_2$
b) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to p}\big(f(x) - g(x)\big) = L_1 - L_2$
c) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to p}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = L_1 \cdot L_2$
d) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to p} g(x) = L_2$, então $\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$
e) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$, então $\lim_{x \to p}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda L_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
f) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$, então $\lim_{x \to \lambda p} f(x) = \lambda L_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
g) Se $\lim_{x \to p} f(x) = L_1$, e $\lim_{x \to q} f(x) = L_2$, então $\lim_{x \to (p+q)} f(x) = L_1 + L_2$
h) Se $\lim_{x \to p} f(x) = \nexists$ e $\lim_{x \to p} g(x) = \nexists$, então $\lim_{x \to p}\big(f(x) + g(x)\big) = \nexists$
i) Se $\lim_{x \to p}\big(f(x) + g(x)\big)$ existe e $\lim_{x \to p} f(x)$ existe, então $\lim_{x \to p} g(x)$ pode não existir.

26) Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Descreva como é a função $(f+g)(x)$.
b) Calcule $\lim_{x\to\pi}(f+g)(x)$
c) Esse exemplo contraria a propriedade de que $\lim_{x\to p}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to p}f(x)+\lim_{x\to p}g(x)$?

27) Calcule os seguintes limites (lembrando que “o limite não existe” é uma resposta possível):
a) $\lim_{x\to 0} 4$
b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \sqrt{5+\sqrt{7}}$
c) $\lim_{x\to -3} 2x+20$
d) $\lim_{x\to 1} 3x^3+2x^2-4x+6$
e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \cos(x)+\sec(x)$
f) $\lim_{x\to 6} \log_2(x^2-4)$
g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4\cos(\pi x)}{2^x+x^2+2}$
h) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
i) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$
j) $\lim_{x\to 5} \frac{25-x^2}{x-5}+x$
k) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$
l) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$
m) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$
n) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1}$
o) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$
p) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{-2x^2+3x-1}{8x^2-6x+1}$
q) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-11x-12}{x^3+1}$
r) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-6x^2+x-30}{x^3-21x+20}$
s) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-7x+6}{x^3+2x^2-16x-32}$
t) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-5x^2-x+5}{x^4-9x^2+4x+12}$



u) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
v) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{x-3}$
w) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$
x) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$
y) $\lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$
z) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$
aa) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2+64}$
bb) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x+4}-2}$
cc) $\lim_{x\to p} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{p}}{x-p}$, onde $p>0$ é uma constante real conhecida.
dd) $\lim_{x\to p} \frac{x-p}{\sqrt{x}-\sqrt{p}}$, onde $p>0$ é uma constante real conhecida.

## Teoremas envolvendo limites

28) Suponha que $\lim_{x\to p} f(x)=L$, onde $L>0$.

Mostre que existe $\delta>0$ tal que $\forall x\in ]p-\delta;p+\delta[$, temos que $f(x)>0$, com a possível exceção quando $x=p$.

( OBS: Esse teorema é conhecido como <u>teorema da conservação de sinal</u>. É um importante resultado na matemática.)

29) Reenuncie e demonstre o teorema da conservação do sinal para o caso em que $L < 0$

30) Interprete o teorema da conservação de sinal (dos dois exercícios anteriores) geometricamente, e explique o seu significado com suas palavras.

31) Demonstre que $\lim_{x \to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} |f(x)| = 0$

32) Em um caso geral, se $\lim_{x \to p} f(x) = L$, isso implica em $\lim_{x \to p} |f(x)| = |L|$?

33) Em um caso geral, se $\lim_{x \to p} |f(x)| = |L|$, isso implica em $\lim_{x \to p} f(x) = L$?

34) Enuncie o teorema do confronto e interprete-o geometricamente.

35) Demonstre o teorema do confronto.

36) Seja $f(x)$ uma função tal que $|f(x) - \pi| \leq 4|x - 2|$. Calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$

37) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $[f(x)]^4 + [g(x)]^4 = 2, \forall x \in \mathbb{R}$.
a) Demonstre que as funções $f(x)$ e $g(x)$ são funções limitadas (e indique por quais valores).
b) Calcule o valor de $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \big(f(x) + g(x)\big) \cdot (sen(x) - \cos(x))$

38) Sejam $f(x)$ uma função limitada, e $g(x)$ uma função tal que $\lim_{x \to p} g(x) = 0$, onde $p$ é um ponto de acumulação do domínio de ambas as funções. Demonstre que $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = 0$.

39) Qual o valor do limite $\lim_{x \to 0} x sen\left(\frac{1}{x}\right)$? Isso contradiz a propriedade de limite do produto?

40) Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Já foi provado nessa lista que $\lim_{x \to p} f(x) = \nexists$.
a) Calcule $\lim_{x \to -2} f(x) \cdot (4 - x^2)$
b) Calcule $\lim_{x \to \pi} sen(x) \cdot f(x) + \mathrm{tg}(x) \cdot \cos\big(f(x)\big)$

## Primeiro limite fundamental

41) Interprete geometricamente a desigualdade $|sen(x)| \leq |x| \leq |tg(x)|, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

42) Demonstre o primeiro limite fundamental.

43) Em física, às vezes usa-se a aproximação $sen(\theta) \approx \theta$ ($\theta$ em radianos) quando o ângulo $\theta$ é pequeno. Explique matematicamente o significado dessa aproximação, e porquê ela funciona melhor para ângulos pequenos.

44) Resolva os limites a seguir:
a) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{2x}$
b) $\lim_{x \to 0} \frac{3sen(x)}{x}$
c) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{x}$
d) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(4x)}{-5x}$
e) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(x)}$
f) $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x}$
g) $\lim_{x \to 0} \frac{2x + 3sen(x)}{4x}$
h) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(x) + tg(x)}$
i) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{tg(3x)}$
j) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(\alpha x)}{\beta x}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$
k) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$
l) $\lim_{x \to \pi} \frac{sen(x)}{\pi - x}$

m) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^3}{sen(x^3)}$
n) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^3}{sen(x^2)}$
o) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2}{sen(x^3)}$
p) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{sen(x)+tg(x)}$
q) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{3sen(2x)+\cos(x)}$
r) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)+x}{tg(x)+x}$
s) $\lim_{x \to 0} \frac{x+sen(2x)}{x-tg(x)}$
t) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-sen(x)}{2x-\pi}$
u) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-sen(x)}{(2x-\pi)^2}$
v) $\lim_{x \to 1} \frac{sen(\pi x)}{x-1}$
w) $\lim_{x \to 3} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-3}$
x) $\lim_{x \to 3} \frac{tg(\pi x)}{x^2-9}$
y) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tg(x)}{sen(x) + \cos(x)}$
z) $\lim_{x \to p} \frac{sen(x)-sen(p)}{x-p}$, onde $p \in \mathbb{R}$
aa) $\lim_{x \to p} \frac{\cos(x)-\cos(p)}{x-p}$, onde $p \in \mathbb{R}$

## Limites Laterais

45) Defina matematicamente limite lateral à esquerda.

46) Defina matematicamente limite lateral à direita.

47) Demonstre que, se uma função real $f: A \to \mathbb{R}, f(x)$ é tal que para algum ponto de acumulação $p$ de seu domínio então $\lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) = L$, então $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

48) A recíproca do teorema é verdadeira? Justifique.

49) Resolva os limites a seguir:
a) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
b) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
d) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$
e) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$
f) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$
g) $\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2}$
h) $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2}$
i) $\lim_{x \to 2} \frac{|x^2-4|}{x-2}$
j) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{|x^3-8x^2+21x-18|}$
k) $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{|x^3-8x^2+21x-18|}$
l) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{|x^3-8x^2+21x-18|}$
m) $\lim_{x \to n^-} x - \lceil x \rceil$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lceil x \rceil$ indica a operação “menor inteiro maior ou igual a $x$”, definida na lista anterior.
n) $\lim_{x \to n^+} x - \lceil x \rceil$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lceil x \rceil$ indica a operação “menor inteiro maior ou igual a $x$”, definida na lista anterior.

o) $\lim_{x \to n} x - \lceil x \rceil$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lceil x \rceil$ indica a operação “menor inteiro maior ou igual a $x$”, definida na lista anterior.

p) $\lim_{x \to n^-} x - \lfloor x \rfloor$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lfloor x \rfloor$ indica a operação “maior inteiro menor ou igual a $x$”, definida na lista anterior.

q) $\lim_{x \to n^+} x - \lfloor x \rfloor$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lfloor x \rfloor$ indica a operação “maior inteiro menor ou igual a $x$”, definida na lista anterior.

r) $\lim_{x \to n} x - \lfloor x \rfloor$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e a operação $\lfloor x \rfloor$ indica a operação “maior inteiro menor ou igual a $x$”, definida na lista anterior.

50) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x - 3, & se\ x \le 2 \\ 3 - x^2, & se\ x > 2 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico dessa função.

b) Calcule $\lim_{x \to 2} f(x)$

51) Considere a função $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{sen(\pi x)}{x+1}, se\ x < -1 \\ \frac{x-1}{x^2-1}, & se -1 < x < 1 \\ \frac{x}{2}, & se\ x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $\lim_{x \to -1} f(x)$

b) Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$

c) Esboce o gráfico dessa função.

## Definições sobre limites envolvendo infinito

52) Explique com suas palavras porque infinito não é um número real.

53) Explique com suas palavras porque a definição anterior ($\varepsilon/\delta$) não pode ser aplicada nem a limites que resultam em infinito, nem em limites nos quais $x$ tende a infinito.

54) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, quando $L \in \mathbb{R}$

55) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, quando $L \in \mathbb{R}$

56) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$

57) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$

58) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p^-} f(x) = \infty$

59) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty$

60) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p^+} f(x) = \infty$

61) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty$

62) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

63) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

64) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

65) Defina e interprete geometricamente (preferencialmente fazendo um esboço) de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

66) Demonstre, através da definição que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

67) Demonstre, através da definição que $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

68) Demonstre, através da definição que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

## Calculando limites que envolvem infinito

69) Diga se as propriedades a seguir são verdadeiras ou falsas:

a) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) + g(x)\big) = \infty$

b) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$

c) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \infty$

d) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 1$

e) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = -\infty$

f) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) + g(x)\big) = \infty$

g) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) - g(x)\big) = \infty$

h) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\big(g(x) - f(x)\big) = -\infty$

i) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \infty$

j) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \infty$

k) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, então $\lim_{x\to p}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0$

l) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $\lambda > 1$, então $\lim_{x\to p}\big(g(x)\big)^{f(x)} = \infty$

m) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = \lambda$, onde $0 < \lambda < 1$, então $\lim_{x\to p}\big(g(x)\big)^{f(x)} = 0$

n) Se $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to p} g(x) = 1$, então $\lim_{x\to p}\big(g(x)\big)^{f(x)} = 1$

70) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+2}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x}{x+2}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{2-4x}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-6}{3x^2+2x+1}$

h) $\lim_{x\to\infty} \frac{(9-x^2)}{4x}$

i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+6x+5}$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$

k) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{\sqrt{x^2+x}}$

l) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}+x}$

m) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$

n) $\lim_{x\to\infty} 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$

o) $\lim_{x\to-\infty} 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$

p) $\lim_{x\to\infty} x^2 - 4x$

q) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 + 2x - 9$

r) $\lim_{x\to-\infty} x^3 + 4x^2 - 10$

s) $\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x)}{x}$

t) $\lim_{x\to-\infty} sen\left(\frac{1}{x}\right)$

u) $\lim_{x\to\infty} sen(x)$

v) $\lim_{x\to\infty} \frac{sen(x)+\cos(x)}{4x}$

w) $\lim_{x\to\infty} sen(\cos(x))$

x) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$

y) $\lim_{x\to\infty}(\pi-3)^x$
z) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^{3x}$
aa) $\lim_{x\to\infty}(2+\cos(x))^{x^2+1}$
bb) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
cc) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x$
dd) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}$
ee) $\lim_{x\to-\infty}x-\sqrt[3]{x^3+1}$
ff) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}$
gg) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}$
hh) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}$
ii) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}$
jj) $\lim_{x\to1^-}\frac{x}{1-x}$
kk) $\lim_{x\to1^+}\frac{x}{1-x}$
ll) $\lim_{x\to3}\frac{3}{x^2-5x+6}$
mm) $\lim_{x\to3}\frac{3}{x^2-6x+9}$
nn) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2+7x-18}{-2x^2+8x-8}$
oo) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}tg(x)$
pp) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}tg(x)$
qq) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sec(x)$
rr) $\lim_{x\to0^+}\log_2(x)$
ss) $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+1}{x}$

71) Dê um exemplo de uma função cujo limite quando $x$ tende a infinito vale 3.

72) Dê um exemplo de uma função cujos limites laterais quando $x$ tende a zero valem infinito e menos infinito.

73) Dê um exemplo de uma função cujo limite quando $x$ tende a $\sqrt{2}$ vale menos infinito.

74) Dê um exemplo de uma função cujo limite quando $x$ tende a infinito é menos infinito.

75) Dê um exemplo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$, mas $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)\neq0$

76) Dê um exemplo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$, mas $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\neq0$

77) Dê um exemplo de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$; $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$, mas $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)\neq0$, e $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)\neq\infty$

## Segundo limite fundamental

78) Enuncie o segundo limite fundamental.

79) Considere uma aplicação financeira que, ao se aplicar um capital inicial $C_0$, após o período de um ano, paga-se uma taxa de 100% de juros, ou seja, você resgata $2C_0$ ao final de um ano. Essa aplicação permite que você resgate o dinheiro da aplicação antes do final de um ano, ganhando a taxa diretamente proporcional ao tempo investido. Então, por exemplo, se o resgate for feito em seis meses, é pago uma taxa de 50%, e você resgata $1.5C_0$.

a) Calcule (com calculadora, ou com algum software apropriado), qual o valor total resgatado se você resgatar o dinheiro após seis meses, e reaplicá-lo logo em seguida por mais seis meses.
b) E se esse processo fosse feito a cada mês?
c) E a cada dia?
d) E por 2000 vezes no ano?
e) A taxa irá crescer para sempre? Justifique.

80) Demonstre, a partir do segundo limite fundamental que $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, onde $e$ indica o número de Euler.

81) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$
b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$
c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$
d) $\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)^{x}$
e) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x}$
f) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4x}$
g) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$
h) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$, onde $a \in \mathbb{R}$
i) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{x}$, onde $a \in \mathbb{R}$
j) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}$, onde $a \in \mathbb{R}$
k) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+a}\right)^{x}$, onde $a \in \mathbb{R}$
l) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{3x-6}\right)^{2(x+4)}$
m) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$
n) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{5-4x}\right)^{x}$
o) $\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
p) $\lim_{x\to0^+}(1-3x)^{\frac{1}{2x}}$

82) Calcule o valor do limite $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

83) Calcule o valor do limite $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, onde $a>0$

## Continuidade

84) Defina continuidade de uma função em um ponto $p$.

85) Defina continuidade de uma função em seu domínio.

86) Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas

a) Funções constantes são contínuas em seu domínio.
b) Funções polinomiais são contínuas em seu domínio.
c) Funções trigonométricas são contínuas em seu domínio.
d) Funções exponenciais são contínuas em seu domínio.
e) Funções logarítmicas são contínuas em seu domínio.
f) Funções trigonométricas inversas ($arcsen(x); arctg(x)$ ...) são contínuas em seu domínio.
g) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com domínio comum, então $f(x)+g(x)$ é contínua.
h) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com domínio comum, então $f(x)-g(x)$ é contínua.
i) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com domínio comum, então $f(x)\cdot g(x)$ é contínua.
j) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas com domínio comum, então $\frac{f(x)}{g(x)}$ é contínua.
k) Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas tais que sua composta é definida (ou seja, a imagem de $g(x)$ pertence ao domínio de $f(x)$), então $f\big(g(x)\big)$ é contínua.
l) Se $f(x)$ é uma função contínua, então $\sqrt{f(x)}$ é contínua.
m) Se $f(x)$ é uma função contínua, então $\sqrt[3]{f(x)}$ é contínua.
n) Se $f(x)$ é uma função contínua, então $e^{f(x)}$ é contínua.
o) Se $f(x)$ é uma função contínua, então $\ln\big(f(x)\big)$ é contínua.
p) Se $f(x)$ é uma função contínua e bijetora, então $f^{-1}(x)$ é contínua.

87) Verifique se as funções a seguir são contínuas no ponto pedido:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, em $x = 2$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, em $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & se\ x \neq 1 \\ 2, & se\ x = 1 \end{cases}$, em $x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}, & se\ x \neq 2 \\ 0, & se\ x = 2 \end{cases}$, em $x = 2$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}, & se\ x \neq 2 \\ 0, & se\ x = 2 \end{cases}$, em $x = 2$

f) $f(x) = \begin{cases} x+3, & se\ x < 0 \\ 3-x^2, & se\ x > 0 \end{cases}$, em $x = 0$

g) $f(x) = \begin{cases} x+3, & se\ x < 0 \\ 3-x^2, & se\ x \geq 0 \end{cases}$, em $x = 0$

h) $f(x) = \begin{cases} x+3, & se\ x < 0 \\ 0, & se\ x = 0 \\ 3-x^2, & se\ x > 0 \end{cases}$, em $x = 0$

i) $f(x) = \begin{cases} sen(x) + \cos(x), & se\ x \leq 0 \\ 1, & se\ 0 < x < \pi \\ sen(x) - \cos(x), & se\ x \geq \pi \end{cases}$, em $x = 0$

j) $f(x) = \begin{cases} sen(x) + \cos(x), & se\ x \leq 0 \\ 1, & se\ 0 < x < \pi \\ sen(x) - \cos(x), & se\ x \geq \pi \end{cases}$, em $x = \pi$

88) Determine valor para as constantes $A, B$ e $C$ de modo que a função $f(x)$ dada seja contínua em todos os reais.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \leq -2 \\ Ax + B, & se\ -2 < x < 2 \\ -1, & se\ x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 4, & se\ x \leq -1 \\ Ax + B, & se\ -1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}, & se\ x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x - x^2, & se\ x \leq 1 \\ Ax + B, & se\ 1 < x < e \\ \ln(x^x), & se\ x \geq e \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} C, & se\ x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x-2}, & se\ 1 < x < 2 \\ Ax + B, & se\ 2 \leq x \leq \pi \\ \frac{sen(x)}{x-\pi}, & se\ x > \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3}, & se\ x < -3 \\ Ax^2 + Bx + C, & se\ -3 \leq x < 0\ \ ou\ \ 0 < x \leq 3 \\ 0, & se\ x = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 2}{x-3}, & se\ x > 3 \end{cases}$

89) Utilizando um software gráfico, esboce os gráficos das funções encontradas na questão anterior.

90) Anteriormente, foi enunciado o teorema da conservação de sinal, dado por:
Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$, onde $L > 0$.
Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in ]p - \delta; p + \delta[$, temos que $f(x) > 0$, com a possível exceção quando $x = p$.
O que muda no enunciado desse teorema quando a função $f(x)$ é contínua em $p$?

## Teoremas envolvendo continuidade

91) Interprete geometricamente o teorema de Bolzano (ou do anulamento).

92) O teorema de Bolzano (ou do anulamento) diz que se $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no intervalo $[a; b]$, e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então certamente haverá ao menos um ponto $c \in ]a; b[$, no qual $f(c) = 0$. Dê um exemplo de uma função descontínua na qual $f(a) \cdot f(b) < 0$, mas não existe ponto $c \in ]a; b[$ no qual $f(c) = 0$. Isso contradiz o teorema de Bolzano?

93) Dê um exemplo de função $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ contínua, no qual $f(a) \cdot f(b) < 0$, mas existe mais de um valor no $c \in ]a; b[$ no qual $f(c) = 0$. Isso contradiz o teorema de Bolzano?

94) Dê um exemplo de função $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ contínua, que possua uma raíz $c \in ]a; b[$, mas $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Isso contradiz o teorema de Bolzano?

95) Prove que todo polinômio de grau três possui ao menos uma raiz real.

96) Prove que todo polinômio de grau ímpar possui ao menos uma raiz real.

97) Prove que a equação $2^x = x^2$ possui ao menos uma raiz negativa. (Não é necessário determinar essa raiz)

98) Prove que existe pelo menos uma solução para a equação $x = \cos(x)$, com $x$ pertencente ao primeiro quadrante.

99) Um alpinista começa a subir uma montanha às 08:00 da quinta-feira, chegando ao ponto mais alto da montanha às 16:00 do mesmo dia. Chegando lá, ele decide montar acampamento, e dormir. No dia seguinte, ele começa a descer a mesma montanha, pelo mesmo caminho feito na subida, começando a descida às 08:00, e terminando a descida às 16:00 do mesmo dia. Demonstre que houve ao menos um momento no qual o alpinista esteve no mesmo local, no mesmo horário, em dias diferentes.

100) Demonstre que, ao longo da linha do Equador, em um instante de tempo escolhido ao acaso, sempre haverão dois pontos diametralmente opostos no qual as suas temperaturas são iguais.

101) Partindo do teorema de Bolzano, demonstre o seguinte teorema:
Seja $f: [a; b] \to \mathbb{R}, f(x)$ uma função contínua na qual $f(a) < f(b)$. Então, para qualquer valor $L$, tal que $f(a) < L < f(b)$, existirá um valor $c \in ]a; b[$ no qual $f(c) = L$.

( OBS: Esse teorema é conhecido como <u>teorema do valor intermediário</u>, outro importante teorema da matemática.)

102) Prove que a equação $9x - \frac{1}{x^2+4} = \lambda$ sempre possui ao menos uma raiz real para qualquer valor $\lambda \in \mathbb{R}$ dado.