Cálculo 1 – Lista 02

Funções

Professor: Daniel Henrique Silva

Conceitos iniciais, domínio, imagem

1) Defina formalmente função.

2) Dê um exemplo numérico e um exemplo não-numérico de função.

3) Defina formalmente domínio de uma função.

4) Para cada uma das funções a seguir, descreva o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a função é válida. Em outras palavras, determine o maior conjunto que pode ser o domínio da função:

a) $f(x) = 4x^2 + 8x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ c) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ d) $f(x) = |x - 4(2 - |x|)|$

e) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 8x + 7} - \frac{4x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ f) $f(x) = sen(x) - \sec(x)$ g) $f(x) = arcsen(2x + 4)$

h) $f(x) = \log_x x$ i) $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$ j) $f(x) = \sqrt{1 - tg^2(x)}$ k) $f(x) = \log_x(\cos(x))$

5) Defina formalmente imagem de uma função.

6) Defina formalmente contradomínio de uma função.

7) Explique a diferença entre contradomínio e imagem de uma função.

8) Dê dois exemplos de função real, um no qual o contradomínio é igual a imagem, e um no qual o contradomínio é diferente da imagem.

9) Defina formalmente o gráfico de uma função real do tipo $y = f(x)$.

Funções elementares

10) Defina função de primeiro grau.

11) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = x$ b) $f(x) = 2x - 4$ c) $f(x) = -2 - x$ d) $f(x) = 5 - 3x$

12) Defina função de segundo grau.

13) Partindo do fato de que o gráfico de uma função de segundo grau será sempre uma parábola simétrica, demonstre que as coordenadas do vértice serão sempre dadas por $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

14) Faça um resumo rápido sobre como será o comportamento do gráfico de uma função de segundo grau genérica, $f(x) = ax^2 + bx + c$, de acordo com o sinal da constante a e com o sinal do discriminante Δ.

15) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$ b) $f(x) = 9 - x^2$ c) $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$ d) $f(x) = -3 - x(x - 3)$

16) Defina função exponencial.

17) Faça uma breve análise sobre o gráfico de uma função exponencial, de acordo com o valor da base a.

18) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

19) Defina função logaritmo.

20) Faça uma breve análise sobre o gráfico de uma função logaritmo, de acordo com o valor da base a.

21) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = \log_2(x)$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

22) Dê o domínio das funções trigonométricas a seguir:

a) $f(x) = sen(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = tg(x)$

d) $f(x) = \sec(x)$ e) $f(x) = cossec(x)$ f) $f(x) = cotg(x)$

23) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = sen(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = tg(x)$

d) $f(x) = \sec(x)$ e) $f(x) = cossec(x)$ f) $f(x) = cotg(x)$

Modificando gráficos de funções conhecidas

24) Seja f(x) uma função cujo gráfico é conhecido. Diga (com um texto), como proceder para obter o gráfico das funções pedidas, a partir do gráfico de f(x).

a) $f(x) + 2$ b) $f(x) - 1$ c) $f(x) + \alpha, \alpha \neq 0$ d) $4.f(x)$ e) $\frac{f(x)}{2}$ f) $-f(x)$ g) $-3.f(x)$

h) $\alpha.f(x), \alpha \neq 0$ i) $f(2x)$ j) $f\left(\frac{x}{3}\right)$ k) $f(-x)$ l) $f(-4x)$ m) $f(\alpha x), \alpha \neq 0$ n) $f(x+1)$

o) $f(x-3)$ p) $f(x+\alpha), \alpha \neq 0$ q) $|f(x)|$ r) $f(|x|)$ s) $|f(|x|)|$

25) Suponha que $f(x)$ é uma função cujo domínio é dado pelo intervalo $[a;b]$, e cuja imagem é dada pelo intervalo $[c;d]$. Sendo α, β e γ constantes reais positivas, determine, em função de $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ o domínio e imagem das funções descritas em casa item:

a) $\alpha \cdot f(x)$ b) $f(x+\alpha)$ c) $f(x) + \alpha$ d) $f(\alpha x)$ e) $\alpha \cdot f(\beta x)$ f) $f(x+\alpha) + \beta$

g) $\frac{f(x+\alpha)}{\beta} + \gamma$ h) $f(\alpha x - \beta) - \gamma$ i) $\alpha - \beta f(x-\gamma)$ j) $\gamma - f\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$

26) Baseado em gráficos de funções conhecidas, e nas técnicas de mudanças de gráficos de funções, esboce os gráficos das funções:

a) $f(x) = 2^x + 1$ b) $f(x) = 2^x - 1$ c) $f(x) = 2^{x+1}$ d) $f(x) = 2^{x-1}$

e) $f(x) = 2\cos(x)$ f) $f(x) = \cos(2x)$ g) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ h) $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$

i) $f(x) = \mathrm{sen}(-3x)$ j) $f(x) = -3\,\mathrm{sen}(x)$ k) $f(x) = \mathrm{sen}(x-3)$ l) $f(x) = 3 - sen(x)$

m) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ n) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ o) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

p) $f(x) = |4sen(\pi x) - 2|$ q) $f(x) = \frac{\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{4} + 1$ r) $f(x) = |3\log_2(|x|)|$

Classificando funções (Paridade, sobrejetividade, injetividade, periodicidade)

27) Defina formalmente função par.

28) Defina formalmente função impar.

29) Explique como identificar graficamente se uma função é par ou impar.

30) Demonstre que se $f(x)$ é impar, então $f(0) = 0$

31) Demonstre que a única função que é par e impar ao mesmo tempo é a função nula, $f(x) = 0$.

32) Dê um exemplo de uma função que não seja nem par nem ímpar.

33) Demonstre que funções polinomiais do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ são sempre funções pares, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

34) Demonstre que funções polinomiais do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}$ são sempre funções ímpares, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

35) Defina função periódica e período de uma função.

36) Dê um exemplo (mesmo que gráfico) de uma função periódica que não seja trigonométrica.

37) Defina formalmente função injetora.

38) Defina formalmente função sobrejetora.

39) Defina formalmente função bijetora.

40) Demonstre que não existe função par e injetora, a menos que seu domínio seja um único ponto.

41) Demonstre que não existe função periódica e injetora.

42) Dê um exemplo de uma função injetora que não seja sobrejetora.

43) Dê um exemplo de uma função sobrejetora que não seja injetora.

44) Julgue as afirmações a seguir como verdadeiras ou falsas, e justifique:
a) Definimos como função de primeiro grau como sendo uma função redutível à forma $f(x) = ax + b$
b) O gráfico de toda função de primeiro grau é uma reta.
c) Toda reta é o gráfico de uma função de primeiro grau.
d) Definimos como função de segundo grau como sendo uma função redutível à forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.
e) Toda parábola é gráfico de alguma função de segundo grau.
f) Se $f(x)$ é uma função polinomial, então seu domínio máximo é $\mathbb{R}$.
g) O gráfico de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$ passa pelo ponto $(1; 0)$, $\forall a > 0, a \neq 1$
h) O domínio máximo de uma função exponencial é $\mathbb{R}$.
i) Toda função exponencial é injetora.
j) O gráfico de uma função logaritmo da forma $f(x) = \log_a(x)$ passa pelo ponto $(1; 0)$, $\forall a > 0, a \neq 1$
k) O domínio máximo de uma função logaritmo é $\mathbb{R}$
l) A função $f(x) = sen(x)$ é periódica de período 2π
m) A função $f(x) = \cos(x)$ é periódica de período 2π
n) A função $f(x) = tg(x)$ é periódica de período 2π
o) O período máximo da função $f(x) = sen(x)$ é $\mathbb{R}$.
p) O período máximo da função $f(x) = \cos(x)$ é $\mathbb{R}$.
q) O período máximo da função $f(x) = tg(x)$ é $\mathbb{R}$.
r) A função $f(x) = \sec(x)$ é periódica de período 2π.
s) A função $f(x) = cossec(x)$ é periódica de período 2π.
t) A função $f(x) = cotg(x)$ é periódica de período 2π.
u) O domínio máximo da função secante é $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
v) O domínio máximo da função cossecante é $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
w) O domínio máximo da função cotangente é $\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

45) Classifique as funções a seguir em relação à paridade (diga se a função é par, ímpar ou nenhuma delas), periodicidade (diga se é periódica ou não periódica), injetividade e sobrejetividade:

a) $f(x) = 4$ b) $f(x) = 3x - \frac{5}{2}$ c) $f(x) = x^2 - 16$ d) $f(x) = x^3 - 5x$ e) $f(x) = |x^3 - 5x|$
f) $f(x) = arctg(x)$ g) $f(x) = \cos(|x|)$ h) $f(x) = x.\cos(x)$ i) $f(x) = 4 + |x|$
j) $f(x) = x^6 - 4x^2$ k) $f(x) = \frac{1}{x}$ l) $f(x) = \left|1 - \sqrt{x}\right|$

46) Determine os maiores conjuntos A, B ⊂ $\mathbb{R}$, tais que $f: A \to B$ seja uma função bijetora.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 3 - \log(x)$ c) $f(x) = tg(2x)$ d) $f(x) = \sec(x) + 1$ e) $f(x) = |9 - x^2|$
f) $f(x) = 2^{|x|}$ g) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ h) $f(x) = x^2 - 8x + 15$ i) $f(x) = \frac{1}{x}$ j) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Funções não-elementares

47) Considere a operação $\lceil x \rceil$, definida como “menor inteiro maior ou igual a x”. Essa operação retorna o menor número inteiro que seja maior ou igual ao valor de x dado. Calcule:

a) $\lceil 5 \rceil$ b) $\left\lceil \frac{135}{17} \right\rceil$ c) $\lceil \pi \rceil$ d) $\left\lceil \sqrt{3333} \right\rceil$ e) $\left\lceil -\frac{4}{7} \right\rceil$ f) $\left\lceil -\sqrt[3]{472} \right\rceil$

48) Considere a operação $\lfloor x \rfloor$, definida como “maior inteiro menor ou igual a x”. Essa operação retorna o maior número inteiro que seja menor ou igual ao valor de x dado. Calcule:

a) $\lfloor 5 \rfloor$ b) $\left\lfloor \frac{135}{17} \right\rfloor$ c) $\lfloor \pi \rfloor$ d) $\left\lfloor \sqrt{3333} \right\rfloor$ e) $\left\lfloor -\frac{4}{7} \right\rfloor$ f) $\left\lfloor -\sqrt[3]{472} \right\rfloor$

49) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = \lceil x \rceil$ b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ c) $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ d) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

50) Esboce o gráfico das funções a seguir:

a) $f(x) = Max\{2; x^2\}$ b) $f(x) = Min\{2; x^2\}$ c) $f(x) = Min\{6 - x; x^2\}$ d) $f(x) = Max\{0; sen(x)\}$

Funções compostas e inversas

51) Dê um exemplo de duas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)$ e $g(x)$ tais que $fog(x) \neq gof(x)$.

52) Sejam $f(x) = ax + b, a \neq 0; g(x) = cx + d; c \neq 0$ duas funções de primeiro grau dadas. Dê condições sobre as constantes $a; b; c; d$ para que $fog(x) = gof(x)$.

53) Sendo $f(x) = 2x - 2; g(x) = 2^x + x; h(x) = \frac{1}{x^2} - x$, calcule:

a) $fog(x)$ b) $gof(x)$ c) $foh(x)$ d) $hof(x)$ e) $goh(x)$ f) $hog(x)$ g) $fof(x)$

h) $gog(x)$ i) $hoh(x)$ j) $fofof(x)$ k) $hofog(x)$

54) Seja $f(x) = \frac{1}{1+x}$ uma função. Definimos, para esse exercício, $f^2(x) = fof(x), f^3(x) = f\left(f^2(x)\right) = f\left(f\left(f(x)\right)\right)$, ... , $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$. Com essas definições:

a) Qual o domínio e imagem de $f(x)$?
b) Escreva explicitamente uma expressão para $f^3(x)$.
c) Mostre que as equações $f(x) = x$ e $f^3(x) = x$ possuem as mesmas soluções.
d) Resolva a equação $f^n(x) = x$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ genérico.

55) Defina função inversa. Dê condições para que uma função possa ser invertível.

56) Determine uma expressão para a função inversa de:

a) $f(x) = 3x - 5$ b) $f(x) = \frac{4-5x}{2}$ c) $f(x) = \log_3(3 + 4x)$ d) $f(x) = 3 + tg\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$

57) Demonstre que uma função admite inversa se, e só se, ela for bijetora.

58) Sabe-se que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ é par, e portanto, não é bijetora. Considerando a função $g(x) = \sqrt{x}$, temos que $fog(x) = gof(x) = x$, o que nos dá a ideia de que $g(x) = f^{-1}(x)$. Como isso é possível, já que $f(x)$ não é bijetora, e, portanto, não admite inversa?

59) Defina o domínio e imagem das funções a seguir de tal modo que as funções possam ser invertíveis em seus respectivos domínios/contradomínios.

a) $f(x) = sen(x)$ b) $f(x) = \cos(x)$ c) $f(x) = tg(x)$
d) $f(x) = \sec(x)$ e) $f(x) = cossec(x)$ f) $f(x) = cotg(x)$

60) Tendo em mente a propriedade gráfica de funções inversas, e o exercício anterior em mente, esboce os gráficos das funções:

a) $f(x) = arcsen(x)$ b) $f(x) = \arccos(x)$ c) $f(x) = arctg(x)$
d) $f(x) = \text{arcsec}(x)$ e) $f(x) = arccossec(x)$ f) $f(x) = arccotg(x)$

61) Sabe-se que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$ é periódica, e portanto, não é bijetora. Considerando a função $g(x) = \arccos(x)$, temos que $fog(x) = gof(x) = x$, o que nos dá a ideia de que $g(x) = f^{-1}(x)$. Como isso é possível, já que $f(x)$ não é bijetora, e, portanto, não admite inversa?

62) Simplifique as expressões:

a) $sen\left(arcsen(x)\right)$ b) $sen(\arccos(x))$ c) $sen\left(arctg(x)\right)$ d) $\cos\left(arcsen(x)\right)$ e) $\cos\left(arctg(x)\right)$
f) $tg\left(arcsen(x)\right)$ g) $tg(\text{arcsec}(x))$ h) $\sec(arccos(x))$ i) $\cos\left(arccossec(x)\right)$ j) $\sec\left(arctg(x)\right)$

63) Considere a função $f: [-3; 3] \to B, f(x) = \begin{cases} x + 3, se\ x \leq 0 \\ 2^x + 2, \ se\ x > 0 \end{cases}$

a) Esboce o gráfico de $f(x)$
b) Determine o conjunto B de modo que $f(x)$ seja invertível.
c) Determine a função inversa de $f(x)$ e esboce seu gráfico.