Cálculo 1 - Lista 01

Pré - Cálculo

Professor: Daniel Henrique Silva

Conjuntos numéricos elementares

1) Defina ou descreva, com suas palavras as noções de:

a) Ente primitivo
b) Definição
c) Axioma
d) Proposição
e) Lema
f) Teorema
g) Corolário
h) Conjectura

2) Defina número par, e número ímpar.

3) Sejam $\mathbb{E}$ o conjunto de todos os números inteiros pares, e $\mathbb{O}$ o conjunto de todos os números inteiros ímpares. Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se $x \in \mathbb{E}$, e $y \in \mathbb{O}$, então $x + y \in \mathbb{O}$.
b) Se $x \in \mathbb{E}$, e $y \in \mathbb{O}$, então $x.y \in \mathbb{E}$.
c) Se $x \in \mathbb{E}$, então $x^2 \in \mathbb{E}$.
d) Se $y \in \mathbb{O}$, então $y^2 \in \mathbb{O}$.

4) Sejam $\mathbb{E}$ o conjunto de todos os números inteiros pares, e seja $\mathbb{O}$ o conjunto de todos os números inteiros ímpares. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. Para as afirmações verdadeiras, tente escrever uma demonstração. Para as falsas, mostre um contra-exemplo.

a) Se $x, y \in \mathbb{E}$, então $x + y \in \mathbb{E}$.
b) Se $x, y \in \mathbb{O}$, então $x + y \in \mathbb{O}$.
c) Se $x \in \mathbb{E}$, e $y \in \mathbb{O}$, então $x + y \in \mathbb{E}$.
d) Se $x \in \mathbb{E}$, e $y \in \mathbb{O}$, então $x + y \in \mathbb{O}$.
e) Se x e y são inteiros, então $x + y \in \mathbb{E} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{E}$.
f) Se x e y são tais que $x + y \in \mathbb{E}$, e $x - y \in \mathbb{O}$, então x e y não podem ser inteiros.
g) Se $x, y \in \mathbb{O}$, então $xy \in \mathbb{O}$.
h) Se $x, y, \in \mathbb{E}$, então $xy \in \mathbb{E}$.
i) Se $x \in \mathbb{E}$, e $y \in \mathbb{O}$, então $x^2 + 3xy - y^2 \in \mathbb{O}$.

5) Defina com suas palavras número racional e número irracional.

6) Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, e justifique.

a) A soma de dois números racionais será sempre racional.
b) A soma de dois números irracionais será sempre irracional.
c) O produto de dois números racionais será sempre racional.
d) O produto de dois números irracionais será sempre irracional.
e) A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.
f) O produto entre um número racional e um irracional é um número irracional.
g) Dados dois números reais x e y quaisquer, então temos que $x < y$; $x = y$ ou $x > y$.
h) Dados dois números reais quaisquer, então $x < x + y$
i) Se x é um número real, então $x^2 \geq 0$.
j) Infinito é um número real irracional.

7) Converta as frações a seguir para a forma decimal, sem uso de calculadoras:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{17}{4}$ c) $\frac{7}{11}$ d) $\frac{132}{7}$ e) $\frac{8}{13}$

8) Converta os números decimais apresentados para forma de fração irredutível, sem uso de calculadoras:

a) 1.25 b) 17.83 c) 0.0014 d) 0.424242… e) 1.711711711… f) 22.7811111…

9) Resolva as seguintes expressões aritméticas:

a) $\frac{7}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}-\frac{11}{2}\right)\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}$.

10) Demonstre que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, ou seja, que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como fração irredutível.

11) Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt{500}$ c) $\sqrt{21952}$ d) $\sqrt[3]{128}$ e) $\sqrt[3]{540000}$ f) $\sqrt[6]{8192}$

12) Dê um exemplo numérico no qual $\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

13) Racionalize e simplifique os seguinte quocientes:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{54}}$ e) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt[3]{32}}$ f) $\frac{4}{2-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ h) $\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}$ i) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$

j) $\frac{x}{\sqrt{x}}$, onde x > 0 k) $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$, onde x ≠ 0 l) $\left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$, onde x > 0

14) 🖳 Para os itens de a) até i) da questão anterior, usando uma calculadora ou software, verifique os valores em decimais calculando a expressão numérica dada, e o valor do quociente racionalizado.

15) Usando a aproximação $\sqrt{3}\approx 1.7321$, calcule o valor de $\frac{2}{\sqrt{3}}$, primeiramente fazendo a divisão, e depois racionalizando antes de dividir. Qual o método você achou mais fáci?

16) Monte um diagrama de Venn representando os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$.

Álgebra

17) Construa uma tabela com as fórmulas de fatoração: Fator comum em evidência, agrupamento, trinômio quadrado perfeito, diferença de quadrados, cubo perfeito, diferença de cubos, soma de cubos.

18) Verifique a validade das expressões de fatoração dadas, desenvolvendo as equações.

a) $x(a+b)=ax+bx$
b) $(a+b)\cdot(x+y)=ax+bx+ay+by$
c) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
d) $(a-b)^2=\ a^2-2ab+b^2$
e) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$
f) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
g) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
h) $(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
i) $(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

19) Fatore as seguintes expressões:

a) $4x^2-8x^3$ b) $32x^4y^3z^5-24x^3y^6z^3+40x^5y^5z^2$ c) $x^2-8x+16$ d) $a^4+2+\frac{1}{a^4}$
e) $2y^3+8y^2+8y$ f) $16-y^2$ g) $16-t^4$ h) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ i) x^6-1
j) x^6+1 k) $t^6-6t^4+12t^2-8$

20) Fatore e simplifique as expressões:

a) $\frac{ax+bx}{a^2-b^2}$ b) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ c) $\frac{4x^2-4x+1}{8x^3-12x^2+6x-1}$ d) $\frac{1-t^3}{1-t^2}$
e) $\frac{2xa+2xb+4ya+4yb}{4x^2+16xy+16y^2}$ f) $\frac{xa^2-xb^2}{2x^2a^2-4x^2ab+2x^2b^2}$ g) $\frac{ax^2+6axy+9ay^2}{bx^3-27by^3}$

21) Algumas expressões algébricas possuem interpretação geométrica. Interprete geometricamente as seguintes fórmulas de fatoração:

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

22) As expressões a seguir não são trinômios quadrados perfeitos. Faça completamento de quadrados para fatorar os polinômios dados:

a) $x^2 - 4x + 5$ b) $x^2 + 16x + 8$ c) $x^2 - 10x + 20$ d) $x^2 - x + 1$ e) $4x^2 + 4x$

f) $9x^2 + 12x - 20$ g) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1$ h) $2x^2 + \sqrt{2}x + 2$

23) Considere um polinômio na forma $x^2 + \alpha x + \beta$. Faça completamento de quadrados nesse polinômio (em função das constantes α, β) de modo a obter uma fórmula geral para completamento de quadrados.

24) Utilizando a fórmula obtida no exercício anterior, deduza a fórmula de Bháskara, para resolver uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em função das constantes $a; b; c$.

Equações, Inequações e Sistemas Lineares

25) Se a massa de um tijolo é um quilo mais a massa de meio tijolo, então qual a massa de um tijolo e meio?

26) Para fazer um bolo para um grande evento, um cozinheiro pegou uma quantidade exagerada de farinha. Após pensar um pouco, decidiu remover um terço de toda a farinha, mais um terço de quilograma. Ainda assim, ele percebeu que ainda havia muita farinha, e decidiu novamente remover um terço da farinha restante, mais um terço de quilograma. Não contente, pensando que ainda havia farinha demais, ele retira pela última vez um terço de toda a farinha restante, mais um terço de quilograma, restando, para o seu bolo, exatos 7Kg de farinha. Determine quanta farinha ele havia inicialmente comprado.

27) Há uma enorme lista de exercícios para ser feita. Fazendo metade dos exercícios hoje, um terço amanhã, um sétimo depois de amanhã, ficam faltando apenas quatro exercícios para que eu termine a lista. Quantos exercícios possui a lista?

28) Um dos mais famosos problemas da matemática é o Epitáfio de Diofanto. Diofanto de Alexandria foi um famoso matemático grego, que, em sua lápide deixou um enigma, para aqueles que desejassem saber a sua idade. Uma tradução livre de seu epitáfio para o português é:

"Deus concedeu-lhe passar a sexta parte de sua vida na juventude; um duodécimo na adolescência; um sétimo, em seguida, foi passado num casamento estéril. Decorreu mais cinco anos, depois do que lhe nasceu um filho. Mas esse filho – desgraçado e, no entanto bem amado! – apenas tinha atingido a metade do total de anos que viveu seu pai, quando morreu. Quatro anos ainda, mitigando a própria dor com o estudo da ciência dos números, passou-os Diofanto, antes de chegar ao termo de sua existência."

Quantos anos viveu Diofanto?

29) Determine, caso existam, valores para k de modo que a equação de segundo grau $k^2x^2 - 4k\sqrt{2}x + 2 = 0$ admita solução única

30) A *razão áurea*, também representada pela letra grega φ, é um número irracional famoso, por diversas razões. Uma de suas propriedades é que a diferença entre a razão áurea e o seu inverso multiplicativo é igual a um. Determine o valor da razão áurea, sabendo que ela é positiva.

31) Resolver em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ c) $x^2 - 6x + 10 = 0$ d) $x^3 - 8 = 0$
e) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ f) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ g) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$
h) $x^5 - 2x^4 - 42x^3 + 138x^2 - 43x + 140 = 0$ i) $x^5 - x^4 - 24x^3 + 28x^2 + 128x - 192 = 0$

32) Resolver em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a) $2x - 5 \geq 0$ b) $3 - x < 4$ c) $\frac{2-x}{3} + \frac{x}{2} > 1$ d) $\frac{3(x-1)}{2} \leq 2(2-x) + \frac{3x}{5} - 1$
e) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$ f) $-x^2 + x + 6 < 0$ g) $2x^2 + 3x + 4 > 0$ h) $-3x^2 + 6x - 3 \geq 0$

33) Encontre valores reais $x; y; z$ tais que $x < y$, mas $xz > yz$.

34) Resolver em $\mathbb{R}$ os sistemas lineares a seguir, pelo método que julgar mais conveniente

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+2y=6 \\ 3x+3y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=5 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=50 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=13 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x-3y+z=7 \\ x+y+z=13 \\ x+4z=10 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-3z=0 \\ 4y+3z=7 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x+y+z+w=1 \\ x+2y+z+w=2 \\ x+y+2z+w=3 \\ x+y+z+2w=4 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -x+y-z+w=1 \\ 3x-4y+4z-w=0 \\ x+2y+3z-w=2 \\ 3x-3y+2z-w=9 \end{cases}$

35) Em cada item, A, B, C e D representam constantes reais. Determine os valores numéricos dessas constantes em cada item, através de um sistema linear.

a) $\dfrac{3x+1}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x+3)}$

b) $\dfrac{x^2+9x+2}{(x-2)x(x+1)} = \dfrac{A}{(x-2)} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{(x+1)}$

c) $\dfrac{-5x^2-6x+3}{(x-1)x(x+1)(x+3)} = \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{C}{(x+1)} + \dfrac{D}{(x+3)}$

36) Os sistemas lineares a seguir são possíveis e indeterminados. Dê a solução geral desses sistemas em função de uma constante λ:

a) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-3y+z=2 \\ 3x-2y+2z=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x-3y+2z=-5 \\ 2x+y-2z=7 \\ 2x-4y+4z=-12 \end{cases}$

37) Dê a solução geral de um sistema linear genérico $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, em função das constantes $a; b; c; d; e; f$, e dê também condições de existência para que essa solução exista.

Geometria Analítica

38) Dados os pontos A(-2; 2), B(3; 1); C(-1; -1); D(4; 2); E(3; 2), determine:

a) As coordenadas do ponto médio entre A e C
b) As coordenadas do ponto médio entre o ponto médio entre A e B e o ponto médio entre C e E
c) A distância entre os pontos C e E
d) A distância entre o ponto B e a origem
e) A distância entre o ponto médio de A e D com a origem

39) Os pontos A(2; 4), B(-2; 2) e C(x_C, y_C) formam um triângulo equilátero. Determine as coordenadas do ponto C. A resposta é única?

40) Os pontos A(1; 1); B(3; 4) e C(x_C; y_C) formam um triângulo isósceles. Determine as coordenadas do ponto C, sabendo-se que C está no eixo das abscissas. A resposta é única?

41) Os pontos A(2; 4), B(0; 3); C(-1; -1) e D(x_D; y_D) formam um paralelogramo. Determine as coordenadas do ponto D. Essa resposta é única?

42) Determine a equação geral e a equação reduzida da reta que contém os pontos A(2; 5) e B(-1; 1)

43) Determine a equação geral e a equação reduzida da reta que passa pelo ponto (1; 4) e forma ângulo de 60º com o eixo x.

44) Determine quais pontos da reta de equação 4x + 3y – 5 = 0 tem distância igual a 9 unidades da origem.

45) Determine a equação da reta que passa pela intersecção entre as retas $r_1: 2x+3y-6=0$ e $r_2: 3x+y+12=0$, e que seja paralela à reta $r_3: 4x-y=0$

46) Demonstre que as retas de equação $r_1: ax+by+c_1=0$ e $r_2: bx-ay+c_2=0$ são perpendiculares, para quaisquer valores de $a; b; c_1; c_2$, com $a \neq 0; b \neq 0$.

47) Sejam r e s duas retas, dadas pelas equações:
$r: kx+(4-k)y+k=0$
$s: (4-k)x-ky-k=0$

Determine a posição relativa entre as retas r e s, em função da constante k.

48) Demonstre que as retas de equações
$r: \cos(t) \cdot x - sen(t) \cdot y = 0$
$s: sen(t) \cdot x + \cos(t) \cdot y = 0$
Onde t é um valor fixo dado, são sempre perpendiculares, independente do valor de t.

49) Seja o triângulo de vértices A(0; 4), B(2; -6) e C(4; 2). Determine:
a) A equação da mediana relativa ao lado BC.
b) A equação da mediatriz relativa ao lado BC.
c) A equação da altura relativa ao lado BC.
d) A equação da reta paralela ao lado BC, passando pelo ponto A.

50) Sejam os pontos A(3; -2), B(0; 2) e C(-4; -1).
a) Mostre que os segmentos AB e BC são perpendiculares entre si.
b) Encontre as coordenadas do ponto $D(x_D; y_D)$ tal que ABCD forme um retângulo.
c) Determine a tangente do ângulo formado entre as diagonais do retângulo.

51) Demonstre que, se duas retas r e s não paralelas, possuem coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente, então a tangente do ângulo entre as duas retas será dada por:

$$tg(\theta_{rs}) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

52) Dados os pontos A(0; 0), B(0; 6) e C(4; 2), determine, para o triângulo ABC, as coordenadas:
a) Do seu baricentro (ou seja, o ponto onde suas medianas se cruzam).
b) Do seu circuncentro (ou seja, o ponto onde suas mediatrizes se cruzam).
c) Do seu ortocentro (ou seja, o ponto onde suas alturas se cruzam).

53) Dê a equação da circunferência que passa pela origem e tem seu centro no ponto $C(2; 6)$.

54) Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.
a) Determine o comprimento da corda formada pela circunferência dada e pela reta $x - 2y = 4$
b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência passando pelo ponto $(6; 6)$

55) Sejam as circunferências de equações:
$\lambda_1 : (x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 4$
$\lambda_2 : (x + 2)^2 + (y – 9)^2 = 36$
$\lambda_3 : (x – 4)^2 + (y – 1)^2 = 16$
a) Mostre que essas três circunferências são tangentes entre si, e faça um esboço delas.
b) Dê a equação da circunferência que passa pelo centro das três circunferências dadas.

Trigonometria

56) Seja ABCD um quadrado de lado ℓ. Traçando sua diagonal AC, montamos o triângulo ABC.
a) Demonstre que os ângulos desse triângulo são 45º; 45º e 90º
b) Utilizando esse triângulo, deduza os valores de $sen(45^o)$; $\cos(45^o)$ e $tg(45^o)$.

57) Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ. Traçando sua mediana relativa ao lado BC, dividimos esse triângulo em dois triângulos, AMB e AMC.
a) Demonstre que os ângulos do triângulo AMB são 30º; 60º e 90º
b) Utilizando esse triângulo, deduza os valores de $sen(30^o)$; $\cos(30^o)$; $tg(30^o)$; $sen(60^o)$; $\cos(60^o)$; $tg(60^o)$

58) Em uma região plana, há uma torre de observação, tal que, a uma certa distância x, um observador inclina a cabeça de 30º para poder olhar o ponto mais alto da torre. Aproximando-se mais 12m da torre, o mesmo observador precisa inclinar a sua cabeça de 60º para poder observar o mesmo ponto da torre de observação. Desconsidere a altura do observador.
a) Determine a altura da torre.
b) Determine a distância inicial do observador em relação à torre.

59) Um trapézio possui ângulos agudos consecutivos de 45º e 60º. Além disso, sabe-se que a base menor do trapézio possui 80% do tamanho da base maior. Determine a altura desse trapézio, em função da medida da base menor.

60) Complete a tabela a seguir, sem consultar nenhuma tabela trigonométrica, e sabendo que x é um ângulo do primeiro quadrante:

	sen(x)	cos(x)	tg(x)	cotg(x)	sec(x)	cossec(x)
a)	1					
b)		0.42				
c)			1.25			
d)				0.75		
e)					2	

61) Simplifique as seguintes expressões:

a) $sen(x).\cos(x)\,.\,tg(x).\,cotg(x).\sec(x)\,.\,cossec(x)$

b) $(sen(x)+\cos(x))^2$

c) $\big(sen(x)+cossec(x)\big).(\cos(x)+\sec(x))$

d) $\frac{\cos(x)-\sec(x)}{sen(x)-\,cossec(x)}$

e) $\big(tg(x)+cotg(x)\big)^2$

62) Em uma folha, faça o desenho de um grande círculo trigonométrico (grande o suficiente para que você possa marcar todas as informações nele), e marque nele os ângulos fundamentais em todos os quadrantes, tanto em graus quanto em radianos. Marque também os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos em seus lugares apropriados, e indique, por linhas pontilhadas, os ângulos correspondentes.

63) Qual o valor numérico aproximado em graus de um radiano?

64) Calcule o valor numérico das seguintes expressões:

a) $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)-tg\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ c) $\frac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{tg\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

d) $sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(\frac{2\pi}{4}\right)+sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cdots+sen\left(\frac{12\pi}{4}\right)$ e) $\cos(0)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{12\pi}{3}\right)$

65) Verifique as seguintes igualdades trigonométricas:

a) $tg^2(x)+1=\sec^2(x)$

b) $cotg^2(x)+1=cossec^2(x)$

c) $sen(2x)=2sen(x)\cos(x)$

d) $\cos(2x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$

e) $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$

f) $sen^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$

g) $tg(2x)=\frac{2tg(x)}{1-tg^2(x)}$

66) Uma escada de 13m de altura está apoiada, em um muro de 12m de altura, sob um ângulo x com a parede, plana e vertical. O ponto de apoio dessa escada escorrega, movendo-se para longe do muro, por certa distância, até que o ângulo entre a escada e a parede se torne 2x. Determine a distância percorrida pelo ponto de apoio da escada.

67) Utilizando os valores fundamentais, determine:

a) $sen(15^o)$ b) $\cos(75^o)$ c) $tg(105^o)$ d) $sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ e) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ f) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

g) $sen\left(\frac{\pi}{8}\right)$ h) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ i) $tg\left(\frac{\pi}{8}\right)$ j) $sen(3x)$ k) $\cos(3x)$ l) $tg(3x)$

68) Demonstre as seguintes relações:

a) sen(arcsen(x)) = x b) cos(arccos(x)) = x c) tg(arctg(x)) = x

d) arcsen(x) = arccos($\sqrt{1-x^2}$) e) arccos(x) = arcsen($\sqrt{1-x^2}$)

f) arcsen(x) = arctg$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ g) arctg(x) = arcsen$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

h) arccos(x) = arctg$\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ i) arctg(x) = arccos$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

69) Determine, caso existam, os valores de:

a) $sen(arctg(2))$ b) $\cos\left(arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ c) $tg\left(\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ d) $sen\left(\arccos\left(\frac{3}{10}\right)\right)$ e) $tg(arcsen(2))$

70) Verifique as seguintes igualdades trigonométricas:

a) $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$
b) $sen(a)sen(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
c) $sen(a)\cos(b) = \frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{2}$
d) $tg(a)tg(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)}$

Módulo

71) Defina módulo algebricamente.

72) Defina módulo geometricamente.

73) Determine o valor numérico das expressões com módulo dadas a seguir:

a) $|7|$ b) $|-4|$ c) $|3-\pi|$ d) $|\pi-3|$ e) $|3|-|\pi|$ f) $|3|+|-\pi|$ g) $|\sqrt{6}-|5-8||$

74) Julgue as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, e justifique:

a) $|x| = ||x||$
b) $|x+y| = |x|+|y|$
c) $|x-y| = |x|-|y|$
d) $|xy| = |x|\cdot|y|$
e) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
f) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
g) $|x+y| = |x-y| \Leftrightarrow x = y = 0$
h) $|x^2| = x^2$
i) $|x^3| = x^3$

75) Demonstre que, para quaisquer $x; y \in \mathbb{R}$, então $|x+y| \leq |x|+|y|$

76) Demonstre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então $|x-y| \geq |x|-|y|$

77) Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x+4| = 5$ b) $|2x-4|+3 = 0$ c) $|x-|x+2|| = 4$ d) $x+||2x+3|-4| = 0$

78) Demonstre que, se $a > 0$, então $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.

79) Demonstre que, se $a > 0$, então $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$.

80) Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|3x-5| < 4$ b) $|25-x^2| < 16$ c) $|x-3|-|3x+7| \geq 0$ d) $x\cdot|x-6| \leq 5$