Cálculo Numérico

Lista 01 – Zeros de Funções Reais

Professor: Daniel Henrique Silva

1) Enuncie o teorema do valor intermediário, e interprete-o graficamente.

2) A função $f(x) = (x-3)^2 \cdot x^2 \cdot (x+3)^2$ possui três raízes reais distintas, mas $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Isso vai contra o teorema do anulamento?

3) Sobre a função da questão anterior, existe algum método numérico que irá determinar alguma raiz dessa função? Justifique.

4) Escreva um algoritmo (em pseudo-código) para cada um dos métodos numéricos aprendidos para zeros de funções reais. Em cada um deles, descreva quem são as variáveis de entrada e de saída. Não se esqueça de colocar um critério de parada caso o método não convirja.

5) Deduza o número n mínimo de iterações necessárias para que o método da bissecção convirja com margem de erro ε, partindo de um intervalo inicial $[a; b]$, em função de ε, a e b.

6) Interprete graficamente a condição $|\varphi'(x)| < 1, x \in [a; b]$ para a convergência do método das aproximações sucessivas.

7) Explique geometricamente o funcionamento do método de Newton para determinar raízes de funções.

8) Compare os métodos para determinar zeros de funções (Bissecção, M.A.S., Newton e Secantes), entre si, mencionando vantagens e desvantagens de um sobre o outro.

9) Seja a função polinomial dada por $f(x) = -1.2x^3 - 1.6868x^2 + 14.4321x - 7.2533$.

a) Utilizando algum software gráfico, faça um esboço do gráfico dessa função no intervalo $[-5; 5]$.

b) Demonstre que essa função irá possuir três raízes reais distintas, e determine intervalos $I_1; I_2; I_3$ tais que cada intervalo contenha uma única raiz do polinômio.

c) Caso você aplique o método da bissecção no intervalo $[-5; 5]$, para qual das raízes o método irá convergir?

d) Quantas iterações são necessárias para que o método da bissecção convirja, a partir do intervalo $[-5; 5]$, com margem de erro absoluto $\varepsilon < 0.0001$? (Note que não é necessário calcular as iterações)

e) Determine qualquer uma das raízes a sua escolha, partindo de um dos intervalos $I_1; I_2; I_3$ determinados no item b), com margem de erro absoluto $\varepsilon < 0.01$, pelo método que achar mais conveniente.

10) Seja a função polinomial $f(x) = 2x^2 - 5x - 17$

a) Demonstre que essa função possui duas raízes reais distintas, sendo uma positiva e uma negativa.

b) Construa ao menos quatro diferentes funções de iteração $\varphi(x)$ que possam ser utilizadas no método das aproximações sucessivas. (Não se preocupe em verificar se as funções convergem ou não)

c) Determine um intervalo no qual a função de iteração $\varphi(x) = \frac{\sqrt{5x+17}}{2}$ irá convergir para a raiz positiva do problema.

d) Com a função do item anterior, aplique o método das aproximações sucessivas, e determine a raiz com erro absoluto $\varepsilon < 0.001$

11) Dada a função $f(x) = \ln(x^2+1) + x - 2$

a) Demonstre que essa função possui uma raiz real no intervalo $[1; 2]$

b) Mostre (utilizando software gráfico) que o método de Newton tem sua convergência garantida no intervalo $[1; 2]$

c) Calcule a raiz desse problema pelo método de Newton com erro relativo $\varepsilon < 0.00001$

12) Dada a função $f(x) = \ln(x^2+1) + x - 2$

a) Demonstre que essa função possui uma raiz real no intervalo $[1; 2]$

b) Mostre (utilizando software gráfico) que o método das secantes tem sua convergência garantida no intervalo $[1; 2]$

c) Calcule a raiz desse problema pelo método das secantes com erro relativo $\varepsilon < 0.001$

13) Considere a função $f(x) = x^2 - 2^x$.

a) Demonstre que essa função possui ao menos uma raiz negativa, e determine um intervalo de amplitude 1 no qual essa raiz esteja contida.

b) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método da Bissecção.

c) Determine uma função $\varphi(x)$ tal que o método das aproximações sucessivas converge no mesmo intervalo.

d) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método das aproximações sucessivas.

e) O método de Newton converge para essa função no intervalo? Justifique.

f) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método de Newton.

g) O método das secantes converge para essa função no intervalo? Justifique.

h) Determine o zero dessa função com erro $\varepsilon < 0.001$, através do método das secantes.