Terceira Prova de Cálculo Numérico – Versão Online

Professor Daniel Henrique Silva – Departamento de Matemática

(1.5) 1) Seja $K_6 = K\ mod\ 6$. Responda à questão teórica correspondente:

Se $K_6 = 0$: Explique o funcionamento do método de Monte Carlo para cálculo de integrais numericamente.

Se $K_6 = 1$: Discuta como o método de Monte Carlo para cálculo de integrais altera seu desempenho em relação à precisão e ao tempo de execução, conforme alteramos a quantidade de pontos usados na malha, e em relação à altura do retângulo que delimita a área a ser calculada.

Se $K_6 = 2$: A fórmula para o erro do método dos trapézios é dada por $E_T \leq \frac{h^3}{12} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$. Utilizando essa expressão, deduza uma fórmula para o erro do método dos trapézios repetidos.

Se $K_6 = 3$: Demonstre que o erro ao se calcular a integral de uma função de terceiro grau qualquer pelo método de Simpson 1/3 é sempre igual a zero, independente da função.

Se $K_6 = 4$: Mencione uma vantagem e uma desvantagem dos métodos de Newton-Cotes em relação ao método de Monte Carlo para cálculo de integrais.

Se $K_6 = 5$: Todos os métodos de Newton-Cotes possuem a mesma base de funcionamento. Diga que base é essa, e a diferença entre os três métodos Newton-Cotes vistos em aula.

(1.0) 2) Seja $K_3 = K\ mod\ 3$. Responda à questão teórica correspondente:

Se $K_3 = 0$: Explique geometricamente a base para o método de Euler para a resolução de PVI's, e deduza a sua fórmula.

Se $K_3 = 1$: Explique como varia o erro em métodos de Taylor quanto métodos de Runge-Kutta para resolução de PVI's, conforme nos afastamos do ponto inicial dado, e conforme variamos o valor do passo h.

Se $K_3 = 2$: Mencione uma vantagem e uma desvantagen dos métodos de Taylor em relação aos métodos de Runge-Kutta (quando comparados com a mesma ordem)

3) Em cálculo I, foi ensinado que o comprimento da curva gerada pelo gráfico de $f(x)$, para $x \in [a;b]$ é dado por $\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. Tendo isso em mente:

(0.5) a) **Monte** uma integral que calcule o comprimento gerado pela função $f(x) = (2+K_3)\cdot\cos(x)\,, x \in [0;\pi]$.

(1.5) b) Utilizando 6 subintervalos, estime o resultado dessa integral através dos métodos do trapézio repetido, Simpson 1/3 repetido e Simpson 3/8 repetido.

(0.5) c) Faça a mudança de variável para que essa integral possa ser calculada utilizando-se a fórmula de quadratura de Gauss por dois pontos, dada por $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(0.5) d) Estime o valor dessa integral pela fórmula de quadratura de Gauss, usando dois pontos.

4) Considere o PVI dado por $\begin{cases} y'' + 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

(1.0) a) Transforme esse PVI num sistema de PVI's de primeira ordem.

(2.0) b) Utilizando $h = 0.1$, estime o valor de $y(0.2)$ e $y'(0.2)$ através do método de Euler.

(0.5) c) Prove que e^{-x^2} é a solução desse PVI, e calcule o erro cometido no item anterior.

<(") Boa Prova!