Cálculo Numérico

Lista 03

Professor: Daniel Henrique Silva

Essa lista abrange integração numérica, e resolução numérica de EDO's, e abrange toda a matéria da 3ª prova.

Instruções gerais para entrega

Nem todos os exercícios devem ser entregues. Essa lista é dividida em três partes, exercícios teóricos, exercícios de cálculos, e exercícios de modelagem. Cada parte possui alguns exercícios que devem ser entregues, e outros que não devem ser entregues, de acordo com o seu coeficiente K. No caso de dúvidas sobre qual é o seu coeficiente K, você pode consultar o professor em qualquer aula, perguntar via email **danielhs@dm.ufscar.br**, ou ainda conferir no site do curso, ao lado do seu RA, na lista disponível em www.cursoiglu.com, a mesma instrução vale para dúvidas em relação à operação "mod", utilizada na lista.

A data de entrega é dia **26/11**, data da terceira prova. Os exercícios correspondentes para serem entregues da lista podem ser entregues pessoalmente, na hora da prova, ou por email, para **danielhs@dm.ufscar.br**, com o assunto TRABALHO DE CÁLCULO NUMÉRICO.

LISTAS ENTREGUES FORA DO PRAZO NÃO SERÃO ACEITAS!!!!

Sobre os exercícios teóricos: Seja N_T o número do exercício teórico, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios teóricos tais que $N_T \; \boldsymbol{mod} \; 6 = K \; \boldsymbol{mod} \; 6$.

A operação mod é o resto da divisão entre números inteiros. Por exemplo, $31 \; mod \; 6$ é o resto obtido ao dividirmos 31 por 6. No caso, 31 dividido por 6 resulta em 5, deixando resto 1. Se seu K for igual a 31, você deverá resolver os exercícios teóricos números $1; 7; 13; 19; 25; 31; 37; 43; 49; 55; 61; 67; 73; 79$ e 85 . Se o seu K for igual a 2, $2 \; mod \; 6 = 0$, e você deve entregar os exercícios $2; 8; 14; 20; 26; 32; 38; 44; 50; 56; 62; 68; 74; 80$ e 86.

Nada impede você de fazer outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de cálculos: Faça todos, independente do seu valor de K.

Para os exercícios de cálculos, é altamente recomendável que você faça os cálculos utilizando software computacional, ou ao menos uma calculadora. Caso você deseje ganhar velocidade para a hora da prova, treine utilizando a mesma calculadora que você pretende usar na prova. No caso específico dos PVI's, o software Excel (ou equivalente) é recomendado pela praticidade.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de modelagem: Seja N_M o número do exercício de modelagem, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios teóricos tais que $N_M \; \boldsymbol{mod} \; 4 = K \; \boldsymbol{mod} \; 4$.

Você não precisa resolver nenhuma equação nessa parte da lista. Apenas modele o problema.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Atenção com os exercícios que deverão ser entregues. Exercícios que não são os devidos de acordo com o seu K serão desconsiderados, e as notas correspondentes diminuídas!

Bom trabalho, e bons estudos!

Exercícios teóricos

1) Explique porque, em cálculo numérico, nós trabalhamos apenas com integrais definidas.

2) Em geral, para cálculo de integrais em cálculo numérico, nós trabalhamos com aproximações de áreas. Para isso, assumimos que a nossa função $f: [a; b] \to \mathbb{R}, f(x)$ é tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Como proceder caso $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$?

3) Em geral, para cálculo de integrais em cálculo numérico, nós trabalhamos com aproximações de áreas. Para isso, assumimos que a nossa função $f: [a; b] \to \mathbb{R}, f(x)$ é tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Como proceder para o caso em que $f(x)$ troca de sinal um número finito de vezes no intervalo $[a; b]$?

4) Em geral, para cálculo de integrais em cálculo numérico, nós trabalhamos com aproximações de áreas. Para isso, assumimos que a nossa função $f: [a; b] \to \mathbb{R}, f(x)$ é tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Se $f(x)$ troca de sinal um número infinito de vezes no intervalo $[a; b]$, é possível se calcular a integral dessa função?

5) Dos métodos de integração vistos em sala, quais são *possíveis* de ser aplicados se $f(x)$ é descontínua em $[a; b]$?

6) Dos métodos de integração vistos em sala, quais fornecem boas aproximações se $f(x)$ é descontínua em $[a; b]$?

7) Explique o funcionamento do método de Monte Carlo para cálculo de integrais.

8) Interprete geometricamente o funcionamento do método de Monte Carlo para cálculo de integrais.

9) O método de Monte Carlo começa “cercando” a área da integral a ser calculada por um retângulo de dimensões B e H. Determine, em função dos parâmetros da função, quais são os melhores valores para B e H que fazem o método funcionar do modo mais eficiente possível.

10) Discuta como o método de Monte Carlo altera seu desempenho em relação ao tempo de execução e em relação à precisão, quando alteramos a quantidade de pontos usados na malha.

11) Discuta como o método de Monte Carlo altera seu desempenho em relação ao tempo de execução e em relação à precisão, quando aumentamos o tamanho do retângulo que delimita a área a ser integrada.

12) Como o método de Monte Carlo avalia se um ponto $(x_i; y_j)$ está dentro ou fora da área que estamos calculando pela integral?

13) Escreva um algoritmo para o método de Monte Carlo, assumindo que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$. Não se esqueça de declarar as variáveis de entrada e de saída do seu algoritmo.

14) Descreva a premissa na qual se baseiam os métodos de Newton-Cotes para cálculos de integrais.

15) Para a *aplicação* dos métodos de Newton-Cotes, é necessário que a função $f(x)$ seja contínua em $[a; b]$?

16) Dê um exemplo de uma função descontínua, na qual é possível se aplicar o método dos trapézios, mas a aproximação obtida seja ruim.

17) Dê um exemplo de uma função descontínua, na qual é possível se aplicar o método dos trapézios, mas a aproximação obtida seja (por coincidência), boa.

18) Deduza geometricamente a fórmula do método dos trapézios para integração numérica.

19) Interprete geometricamente o significado do termo $f''(x)$ na fórmula do erro do método dos trapézios.

20) Deduza a fórmula do método dos trapézios repetidos, supondo já conhecida a fórmula do método dos trapézios. Há alguma restrição em relação ao número de intervalos no qual esse método pode ser usado?

21) Explique geometricamente (faça um desenho se necessário) que explique porquê o método dos trapézios repetidos aumenta a precisão do cálculo da integral, conforme aumentamos o número de subintervalos.

22) Explique algebricamente porquê o método dos trapézios repetidos aumenta a precisão do cálculo da integral conforme aumentamos o número de subintervalos.

23) A fórmula para o erro do método dos trapézios é dada por $E_T \leq \frac{h^3}{12} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$. Utilizando essa expressão, deduza uma fórmula para o erro do método dos trapézios repetidos.

24) A fórmula para o erro do método dos trapézios é dada por $E_T \leq \frac{h^3}{12} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$, e a fórmula para o erro do método dos trapézios repetidos é dada por $E_{T_R} \leq \frac{h^3 n}{12} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$, onde n indica o número de subintervalos. Isso quer dizer que o erro é maior no método dos trapézios repetidos do que no método dos trapézios? Justifique.

25) Baseado na fórmula de erros para o método dos trapézios, em quantas vezes é esperado que o erro diminua se usarmos 10 vezes mais trapézios?

26) Mostre algebricamente que o erro cometido no método dos trapézios ao se calcular a integral de uma função de primeiro grau é zero.

27) Interprete geometricamente a questão anterior.

28) Explique a base do funcionamento do método de Simpson 1/3

29) Deduza a fórmula para o método de Simpson 1/3 para uma integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. (Pela definição)

30) Deduza a fórmula do método de Simpson 1/3 repetido, supondo já conhecida a fórmula do método de Simpson 1/3. Há alguma restrição em relação ao número de intervalos no qual esse método pode ser usado?

31) Explique geometricamente (faça um desenho se necessário) que explique porque o método de Simpson 1/3 repetidos aumenta a precisão do cálculo da integral, conforme aumentamos o número de subintervalos.

32) Explique algebricamente porquê o método de Simpson 1/3 repetido aumenta a precisão do cálculo da integral conforme aumentamos o número de subintervalos.

33) A fórmula para o erro do método de Simpson 1/3 é dada por $E_{S_{\frac{1}{3}}} \leq \frac{h^5}{180} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$. Utilizando essa expressão, deduza uma fórmula para o erro do método de Simpson 1/3 repetido.

34) A fórmula para o erro do método de Simpson 1/3 é dada por $E_{S_{\frac{1}{3}}} \leq \frac{h^5}{180} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$, e a fórmula para o erro de Simpson 1/3 repetido é dada por $E_{S_{\frac{1}{3}R}} \leq \frac{h^5 n}{90} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$, onde n indica o número de subintervalos. Isso quer dizer que o erro é maior no método de Simpson 1/3 repetido do que no método de Simpson 1/3? Justifique.

35) Baseado na fórmula de erros para o método de Simpson 1/3 repetido, em quantas vezes é esperado que o erro diminua se usarmos 10 vezes mais intervalos?

36) Mostre algebricamente que o erro cometido no método de Simpson 1/3 ao se calcular a integral de uma função de segundo grau é zero.

37) Interprete geometricamente a questão anterior.

38) Explique a base do funcionamento do método de Simpson 3/8

39) Deduza a fórmula para o método de Simpson 3/8 para uma integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. (Pela definição)

40) Deduza a fórmula do método de Simpson 3/8 repetido, supondo já conhecida a fórmula do método de Simpson 3/8. Há alguma restrição em relação ao número de intervalos no qual esse método pode ser usado?

41) Explique geometricamente (faça um desenho se necessário) que explique porque o método de Simpson 3/8 repetidos aumenta a precisão do cálculo da integral, conforme aumentamos o número de subintervalos.

42) Explique algebricamente porquê o método de Simpson 3/8 repetido aumenta a precisão do cálculo da integral conforme aumentamos o número de subintervalos.

43) A fórmula para o erro do método de Simpson 3/8 é dada por $E_{S_{\frac{3}{8}}} \leq \frac{3h^5}{80} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$. Utilizando essa expressão, deduza uma fórmula para o erro do método de Simpson 3/8 repetido.

44) A fórmula para o erro do método de Simpson 3/8 é dada por $E_{S_{\frac{3}{8}}} \leq \frac{3h^5}{80} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$, e a fórmula para o erro de Simpson 3/8 repetido é dada por $E_{S_{\frac{3}{8}R}} \leq \frac{h^5 n}{80*} \cdot Max_{x\in[a;b]}|f''''(x)|$, onde n indica o número de subintervalos. Isso quer dizer que o erro é maior no método de Simpson 3/8 repetido do que no método de Simpson 3/8? Justifique.

45) Baseado na fórmula de erros para o método de Simpson 3/8 repetido, em quantas vezes é esperado que o erro diminua se usarmos 10 vezes mais intervalos?

46) Mostre algebricamente que o erro cometido no método de Simpson 3/8 ao se calcular a integral de uma função de terceiro grau é zero.

47) Interprete geometricamente a questão anterior.

48) Qual o menor número de pontos no qual os métodos dos trapézios repetidos, Simpson 1/3 repetido e Simpson 3/8 repetido podem ser aplicados simultaneamente?

49) Dê uma expressão que determine a quantidade de pontos no qual os métodos dos trapézios repetidos, Simpson 1/3 repetido e Simpson 3/8 repetido podem ser aplicados silmutaneamente.

50) Compare o método de Monte Carlo com os métodos de Newton-Cotes em relação à diferença na abordagem dos métodos para o problema

51) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Monte Carlo em relação aos métodos de Newton-Cotes para cálculo de integrais.

52) Dê uma interpretação para os métodos de Newton-Cotes através de médias ponderadas.

53) Explique a base de funcionamento dos métodos de quadratura.

54) Monte um sistema que determine coeficientes $A_0; A_1; x_0; x_1$, tal que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$, de modo que essa fórmula seja exata para as funções $\{1; x; x^2; x^3\}$

55) Monte um sistema que determine coeficientes $A_0; A_1; x_0; x_1$, tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$, de modo que essa fórmula seja exata para as funções $\{sen(x); \cos(x); sen(2x); \cos(2x)\}$

56) Em que situações a fórmula de quadratura da última questão é mais apropriada?

57) É necessário para a *aplicação* do método de quadratura gaussiana que a função $f(x)$ seja contínua no intervalo de integração?

58) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de quadratura em relação aos métodos Newton-Cotes para integração.

59) Deduza a mudança de variável que transforma $\int_a^b f(t)dt$ em $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

60) Explique porque o método de quadratura gaussiana com dois pontos é exata para cálculos de polinômios de grau menor ou igual a 3.

61) Monte um sistema que determine coeficientes $A_0; A_1; A_2; x_0; x_1; x_2$, tal que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$, de modo que essa fórmula seja exata para polinômios de grau menor ou igual a 5.

62) Defina equação diferencial ordinária

63) Defina problema de valor inicial

64) "Uma equação diferencial de primeira ordem possui sempre solução única". Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique, ou dê um contraexemplo.

65) Explique porque nós não resolvemos EDO's pelos métodos computacionais, apenas PVI's.

66) Porque não resolvemos equações diferenciais explicitamente por métodos numéricos?

67) Explique a base geométrica do método de Euler para resolução de PVI's

68) Escreva um algoritmo para o método de Euler para a resolução de PVI's

69) Explique geometricamente porque o erro no método de Euler aumenta conforme nos afastamos do ponto inicial

70) Explique algebricamente porque o erro do método de Euler aumenta conforme nos afastamos do ponto inicial

71) Explique geometricamente porque o erro do método de Euler aumenta conforme aumentamos o tamanho do passo.

72) Explique algebricamente porque o erro do método de Euler aumenta conforme aumentamos o tamanho do passo.

73) Qual a relação entre o método de Euler e séries de Taylor?

74) "Quanto menor o valor do passo h, o erro no método de Taylor é **sempre** menor". Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique, ou dê um contraexemplo.

75) No método de Euler, dado um ponto inicial $(x_0; y_0)$, encontramos uma lista de pontos $(x_i; y_i)$ pertencentes à solução, em geral, temos que $x_i > x_0$. É possível se aplicar o método de Euler para determinar pontos da solução nos quais $x_i < x_0$? Se sim, como? Caso não seja possível, justifique o porquê.

76) Explique a ideia geométrica dos métodos para resolução de PVI's baseados em séries de Taylor.

77) O método de Euler pode ser considerado um método baseado em série de Taylor? Justifique.

78) Escreva o algoritmo de resolução de um PVI por série de Taylor de ordem 2

79) Escreva o algoritmo de resolução de um PVI por série de Taylor de ordem 3

80) Discuta como fica a precisão do método de resolução de um PVI por série de Taylor, conforme aumentamos a ordem do método.

81) Discuta como fica a velocidade do método de resolução de um PVI por série de Taylor, conforme aumentamos a ordem do método.

82) Explique a ideia geométrica dos métodos de Runge-Kutta.

83) O método de Euler pode ser considerado como um método de Runge-Kutta?

84) Interprete geometricamente a fórmula de Runge-Kutta de ordem 2.

85) Escreva a fórmula de Runge-Kutta de ordem 4

86) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Taylor em relação ao método de Runge-Kutta, quando comparados na mesma ordem.

87) Mostre como adaptar os métodos de resolução de PVI's para a resolução de sistemas de PVI's.

88) Mostre como adaptar os métodos de resolução de PVI's aprendidos em sala para resolver equações diferenciais de ordens maiores que 1.

89) Todos os métodos vistos em sala podem ser utilizados para resolver sistemas de PVI's?

90) O erro ao se resolver sistemas de PVI's também é acumulativo? Justifique.

Exercícios de Cálculos

Atenção: Nessa lista, utilize quatro casas decimais para os cálculos. Lembre-se de que você pode utilizar qualquer software/programa para resolver os cálculos envolvidos. Apenas deixe indicado qual software/programa você utilizou para fazer os cálculos.

1) Dada a integral $\int_{-1}^{3} x^2 e^x - 2\,dx$.

a) Determine o valor dessa integral pelo método dos trapézios repetidos, utilizando 6 subintervalos.
b) Determine o valor dessa integral pelo método de Simpson 1/3 repetido, utilizando 6 subintervalos.
c) Determine o valor dessa integral pelo método de Simpson 3/8 repetido, utilizando 6 subintervalos.
d) Determine o valor dessa integral por quadratura gaussiana com dois pontos.

2) Considere a integral $\int_{-4}^{2} e^{3x} dx$.

a) Determine qual o número de subintervalos necessários para que essa integral tenha erro menor ou igual à 10^{-3}, quando calculada pelo método dos trapézios repetidos.
b) Determine qual o número de subintervalos necessários para que essa integral tenha erro menor ou igual à 10^{-3}, quando calculada pelo método de Simpson 1/3 repetido.
c) Determine qual o número de subintervalos necessários para que essa integral tenha erro menor ou igual à 10^{-3}, quando calculada pelo método de Simpson 3/8 repetido.
d) Calcule o valor dessa integral por quadratura gaussiana com 4 pontos.
e) Calcule resultado exato dessa integral analiticamente, e compare com o resultado do item d).

3) Dado o PVI: $\begin{cases} \frac{2}{y - y'} = \sec(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Monte tabelas com os resultados para o PVI no intervalo $[0.8; 1.2]$, utilizando $h = 0.05\ldots$

a) Através do método de Euler
b) Através de Runge-Kutta de ordem 2
c) Através de Runge-Kutta de ordem 4
d) Através de série de Taylor de ordem 2
e) Através de série de Taylor de ordem 3

4) Considere o PVI dado por: $\begin{cases} y''' + (y'')^2 \cdot y' + 4y = \cos(3x) \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = -1 \end{cases}$

a) Transforme esse PVI num sistema de PVI's de primeira ordem.
b) Faça dois passos da resolução desse sistema através do método de Euler, utilizando $h = 0.1$

Exercícios de Modelagem

1) Determine uma integral que calcula a área entre $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{(12 - x^2)}{4}$

2) Como proceder para estimar a área entre $f(x) = \sec(x)$, e a reta $y = 2$ no intervalo $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$? (Observe que é uma integral imprópria!)

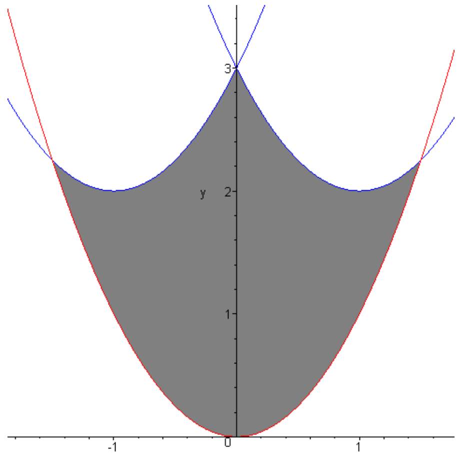
3) Como proceder para determinar a área entre os gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ no intervalo $[0; 2\pi]$?

4) Uma piscina de um clube tem, em toda a sua extensão, a profundidade constante de 2m. Além disso, quando medida de fora a fora, a distância entre suas pontas mais extremas é de 12m. E ela tem um formato totalmente irregular em suas laterais. Medindo-se transversalmente, a distância entre as duas extremidades da piscina, montamos a seguinte tabela:

Metragem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distância	0	3	5	4	5	7	3	4	10	12	9	7	0

Modele integrais que determinem a área e o volume dessa piscina

5)



A figura ao lado ilustra um brasão que será bordado nas camisetas de um time de futebol da 4ª divisão. Este brasão é limitado por baixo pela parábola de equação f(x) = x^2, e superiormente pelas parábolas g(x) = $(x-1)^2 + 2$, e h(x) = $(x+1)^2 + 2$. (x dado em cm.)

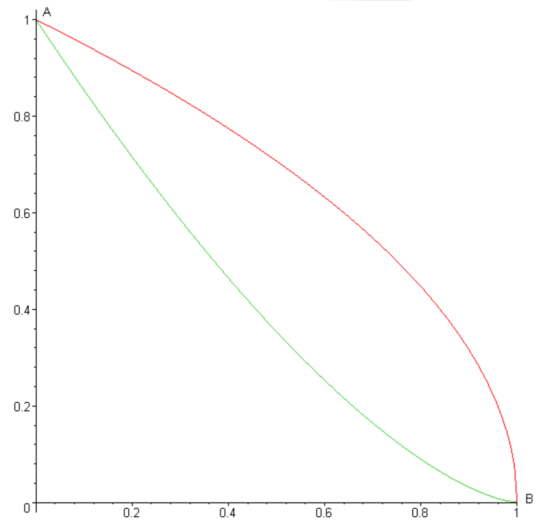
a) Modele integrais que determinem a área, em centímetros quadrados, de cada brasão.

b) Este brasão terá, em todo o seu contorno, uma linha dourada. Determine integrais que calculem quanta linha, em cm, será utilizada para se contornar cada um destes brasões.

Dado: Fórmula do comprimento de arco de f(x) entre a e b:

C = $\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\ dx$

6)



Uma linha férrea irá passar da cidade A até a cidade B. Essa linha pode fazer dois caminhos possíveis, descritos, de maneira aproximada, pelas funções f(x) = $\sqrt{1-x}$, e g(x) = $\frac{\sqrt{(4-4x)^3}}{8}$.

Sendo que, estes dois gráficos representam, em escala, as duas funções. Adote que cada unidade do gráfico corresponde a 100Km.

A linha férrea que passe por g(x) é nitidamente mais curta, mas passa por um desnível, que encarecerá a obra em 20% de seu valor final.

Modele matematicamente uma equação que possa responder à seguinte pergunta:

Apesar do preço 20% mais caro pela linha de g(x), vale a pena passar a linha férrea por este caminho? Quanto, percentualmente, uma linha é mais barata do que a outra?

Enunciado dos exercícios de 7 à 10: Sabe-se que o volume de um sólido de revolução gerado por f(x) em torno do eixo x é dado por $\pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$, onde f(x) é a função a ser rotacionada entre a e b, então determine uma forma de calcular:

7) O volume de uma esfera de raio R.

8) O volume do "vaso" gerado pela rotação da função f(x) = 2 + sen(x), para x $\in$ [0, 2π].

9) A peça gerada pelo cilindro de raio 4, quando retirada de dentro dele um sólido gerado pela rotação de f(x) = $\sqrt{16-4x}$.

10) O "donut", criado pela rotação da circunferência de equação $x^2 + (y-4)^2 = 4$

11) Descreva como utilizar o método de Monte Carlo para estimar o valor de $\sqrt{3}$. Dica: utilize um triângulo equilátero

12) Sabe-se, fisicamente que o trabalho de uma partícula em movimento, sobre ação de uma força, em um movimento unidimensional é dado por $W = \int_{x0}^{x1} F(x)dx$, onde F é uma função de força, dada em função da posição x, e x_0 e x_1 são os pontos de início e fim de movimento. Determine o trabalho exercido pelas forças:

a) $F(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1; 1]$

b) $F(x) = \sin(\pi x)$, $x \in [0; 4]$

13) Quando temos um material radioativo, sabe-se que a taxa de emissão de partículas radioativas por tempo é proporcional a massa de material radioativo remanescente na amostra. (A constante de proporcionalidade varia de acordo com o material em questão). É possível encontrar uma equação y(t), que determina a massa de material radioativo, dados uma quantidade inicial de material radioativo, e o tempo de meia-vida (tempo necessário para que a quantidade de material caia pela metade).

a) Modele um PVI que determine a função y(t) que representa a quantidade de material radioativo em um tempo t, dado que a quantidade inicial de material é y_0. (OBS: Esse PVI, bem como sua solução ficará em função da constante de proporcionalidade K).

b) Imagine que, para um determinado material radioativo, tem-se uma amostra inicial de 100g, e que para esse material, a sua constante de proporcionalidade seja K = 0,003. Utilizando passo h = 0,05, determine a quantidade de material radioativo restante na amostra, para t = 0,3. (Note que t pode estar em qualquer unidade, horas, anos...)

c) Utilizando h = 0,1, determine a quantidade de material radioativo restante na amostra, para t = 0,3. Este resultado será mais preciso ou menos preciso do que o encontrado no item b)? Justifique.

14) De acordo com a lei de resfriamento de Newton, um corpo de temperatura T_0, quando em um ambiente de temperatura T, varia de temperatura com uma taxa que é proporcional a diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

a) Modele um PVI que determine a função T(t) que representa a temperatura T em um instante t qualquer. (Note que esse PVI, bem como sua solução ficará em função da constante de proporcionalidade K)

b) Um copo de suco gelado, à temperatura inicial de 5ºC é esquecido em cima de uma mesa, em um local onde a temperatura ambiente é 30ºC. Admita que a constante de proporcionalidade valha K = 0,25, quando o tempo t é medido em minutos. Utilizando o método de Euler, e h = 1, crie uma tabela com a temperatura desse copo de suco nos primeiros 5 minutos.

c) Sabendo que a função da temperatura é dada explicitamente por $T(t) = 30 - 25e^{-0,25t}$, determine o erro relativo cometido em cada minuto.

15) No caso de um movimento com resistência do ar, a força de resistência é proporcional à velocidade ao quadrado do corpo. (A constante de proporcionalidade depende do formato do corpo). Para um corpo de massa igual a 0,5Kg, e admitindo que a aceleração da gravidade seja constante e igual a $9,81m/s^2$, então:

a) Modele uma equação diferencial que permita calcular a velocidade do corpo em qualquer momento. (A equação estará em função de K, constante de proporcionalidade).

b) Admitindo que K = 2,25, e que o corpo parta do repouso, modele um PVI que calcule a velocidade do corpo em um instante qualquer.

c) Com h = 0,1, faça uma tabela que determine a velocidade do corpo no primeiro 0,5s de movimento.

16) Um tanque com 100ℓ de água pura recebe 4ℓ/s de uma mistura contendo 20g/ℓ de sulfato de sódio. Ao mesmo tempo, o tanque tem uma vazão de 4ℓ/s da mistura nele contida. Admita que o sal se dissolva de maneira uniforme no tanque, de modo instantâneo.

a) Modele um PVI que determine a quantidade de sal contido no tanque, em um instante t qualquer.

b) Utilizando h = 0,5, monte uma tabela com a quantidade de sal no tanque, nos primeiros 3 minutos.

c) Como alterar o PVI anterior para que ele dê como resposta a concentração de sal no tanque, ao invés da quantidade de sal nele contida?