Cálculo Numérico

Lista 02

Professor: Daniel Henrique Silva

Essa lista abrange interpolação polinomial e método dos mínimos quadrados, e cobre a matéria da segunda prova.

Instruções gerais para entrega

Nem todos os exercícios devem ser entregues. Essa lista é dividida em três partes, exercícios teóricos, exercícios de cálculos, e exercícios de modelagem. Cada parte possui alguns exercícios que devem ser entregues, e outros que não devem ser entregues, de acordo com o seu coeficiente K. No caso de dúvidas sobre qual é o seu coeficiente K, você pode consultar o professor em qualquer aula, perguntar via email **danielhs@dm.ufscar.br,** ou ainda conferir no site do curso, ao lado do seu RA, na lista disponível em www.cursoiglu.com, a mesma instrução vale para dúvidas em relação à operação “mod”, utilizada na lista.

A data de entrega é dia **22/10**, data da segunda prova. Os exercícios correspondentes para serem entregues da lista podem ser entregues pessoalmente, na hora da prova, ou por email, para **danielhs@dm.ufscar.br**, com o assunto TRABALHO DE CÁLCULO NUMÉRICO.

LISTAS ENTREGUES FORA DO PRAZO NÃO SERÃO ACEITAS!!!!

Sobre os exercícios teóricos: Seja N_T o número do exercício teórico, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios teóricos tais que $N_T\ \boldsymbol{mod}\ 7 = K\ \boldsymbol{mod}\ 7$.

A operação mod é o resto da divisão entre números inteiros. Por exemplo, $29\ mod\ 7$ é o resto obtido ao dividirmos 29 por 7. No caso, 29 dividido por 7 resulta em 4, deixando resto 1. Se seu K for igual a 29, você deverá resolver os exercícios teóricos números $1; 8; 15; 22; 29; 36; 43\ e\ 50$. Se o seu K for igual a 7, $7\ mod\ 7 = 0$, e você deve entregar os exercícios $7; 14; 21; 28; 35; 42; 49\ e\ 56$.

Nada impede você de fazer outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de cálculos: Faça todos, independente do seu valor de K

Para os exercícios de cálculos, é altamente recomendável que você faça os cálculos utilizando software computacional, ou ao menos uma calculadora. Caso você deseje ganhar velocidade para a hora da prova, treine utilizando a mesma calculadora que você pretende usar na prova.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de modelagem: Se seu K for par, faça os pares. Se seu K for ímpar, faça os ímpares.

Os exercícios de modelagem visam transformar problemas práticos em equações. Você não precisa resolver nenhuma equação nessa parte da lista. Apenas modele o problema.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Atenção com os exercícios que deverão ser entregues. Exercícios que não são os devidos de acordo com o seu K serão desconsiderados, e as notas correspondentes diminuídas!

Bom trabalho, e bons estudos!

Exercícios teóricos

1) Defina polinômio interpolador.

2) Dê um exemplo de aplicação prática de interpolação polinomial na sua área.

3) Enuncie (mas não demonstre) o teorema de existência e unicidade para polinômio interpolador.

4) Dados pontos $P_1(x_1; y_1); P_2(x_2; y_2); \dots; P_n(x_n; y_n)$, escreva um sistema linear cujo objetivo seja encontrar um polinômio de grau no máximo $n-1$ que passe por esses pontos.

5) Demonstre, através de um sistema $2x2$, que a fórmula geral do polinômio interpolador pelos pontos $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ é dada por $p(x) = \frac{(y_1 - y_2)x}{x_1 - x_2} + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$.

6) Demonstre que a fórmula obtida na questão anterior é a equação da reta que passa pelos pontos dados.

7) Explique algebricamente a importância da condição $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$ para a existência do polinômio interpolador.

8) Explique geometricamente a importância da condição $x_i \neq x_j$, se $i \neq j$ para a existência do polinômio interpolador.

9) Dada uma tabela de valores obtidos experimentalmente

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

Descreva como a interpolação polinomial pode nos ajudar a obter o valor esperado para y_i correspondente a algum valor de x_i que não está pertencente a tabela, mas está contido no intervalo $[x_1; x_n]$

10) Utilizando a tabela do exercício anterior, é possível extrapolar os dados para algum valor de x_i que não esteja contido no intervalo $[x_1; x_n]$? Justifique.

11) Ainda com a tabela do enunciado do exercício 9, descreva como a interpolação polinomial pode nos ajudar a obter o valor esperado para algum x_i correspondente a um y_i dado, que esteja próximo aos valores de Y contidos na tabela, mas não pertencente a ela, sem a necessidade de novos experimentos.

12) No exercício anterior, porque a condição “um y_i dado, que esteja próximo aos valores de Y contidos na tabela” é importante?

13) Dados 5 pontos distintos, **sempre** existirá um polinômio de grau 4 que passa por esses pontos. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

14) Dados n pontos aleatórios no gráfico cartesiano, **sempre** existirá um polinômio interpolador que passa por esses pontos? Justifique.

15) Dados 3 pontos cujas coordenadas x são sempre distintas, **sempre** existirá um polinômio interpolador de grau 2 que passa por esses pontos? Justifique.

16) Porque não utilizamos interpolação polinomial com um número infinito de pontos?

17) Explique como funciona o método de interpolação polinomial de Lagrange.

18) Explique como funciona o método de interpolação de Newton.

19) Descreva a diferença em relação a abordagem entre o método de interpolação de Lagrange e o método de interpolação de Newton.

20) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de interpolação de Lagrange em relação ao método de Newton.

21) Ao interpolar n pontos pelo método de Newton, quantos elementos terá a tabela de diferenças divididas (em função de n)?

22) Ao interpolar n pontos pelo método de Newton, quantas operações serão feitas para a construção da tabela de diferenças divididas (em função de n)?

23) Demonstre que o polinômio interpolador pelos pontos $(x_1;\ \alpha); (x_2; \alpha); \dots (x_n;\ \alpha)$ é constante, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

24) Quais mudanças devem ser feitas no método de Newton quando utilizamos o primeiro coeficiente de cada coluna da tabela de diferenças divididas ao invés do último de cada coluna?

25) Diferencie o método de Newton e o método de Newton-Gregory para interpolações polinomiais, mencionando uma vantagem e uma desvantagem de cada um deles sobre o outro.

26) Qual o erro cometido quando utilizamos um polinômio interpolador para interpolar pontos? Justifique.

27) Dada a fórmula de erro para interpolação polinomial $E_n(x) \leq Max_{x\in[a;b]} \left| f^{(n)}(x) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \right|$, explique porque o erro aumenta se $x \notin [a;b]$

28) Ao se aplicar o método de interpolação polinomial para se interpolar n pontos distintos, existirá algum método mais preciso para determinar o polinômio? Justifique.

29) O que é o “Fenômeno de Runge”? Dê um exemplo gráfico de como ele pode acontecer.

30) Em que situações o fenômeno de Runge ocorre?

31) O fenômeno de Runge acontece independente do método de interpolação. Essa frase é verdadeira ou falsa? Justifique.

32) Qual o objetivo do método dos mínimos quadrados polinomial?

33) Qual o objetivo do método dos mínimos quadrados?

34) Tanto a interpolação polinomial quanto o método dos mínimos quadrados polinomial aproximam pontos dados por um polinômio. Qual a diferença em relação a abordagem desses dois métodos?

35) Dê um exemplo de uma situação onde é mais conveniente utilizar o método dos mínimos quadrados ao invés de interpolação polinomial para se criar uma função.

36) Como é feita a escolha do grau do polinômio para aplicar o método dos mínimos quadrados polinomial?

37) Defina produto interno.

38) Quais são as propriedades que um produto interno deve satisfazer?

39) Prove que, se $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ e $y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ são dois vetores de $\mathbb{R}^n$, então $< x; y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

40) Prove que, se $f(x); g(x): [a;b] \to \mathbb{R}$ são funções reais contínuas, então $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ irá definir um produto interno no espaço de funções.

41) Seja $<;>$ um produto interno qualquer. Prove que $< x; 0 > = 0, \forall x$

42) Descreva como funciona o MMQ polinomial.

43) Descreva como funciona o MMQ discreto para um caso não-polinomial.

44) Descreva como funciona o MMQ contínuo.

45) Há alguma relação entre a quantidade de pontos disponíveis numa amostra e o grau do polinômio escolhido para aproximarmos pelo MMQ polinomial?

46) O que acontece se utilizarmos o MMQ polinomial de grau 3 com 4 pontos inicias dados? Justifique.

47) Ao aumentarmos o grau do polinômio no MMQ polinomial, a precisão sempre aumenta. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

48) Qual a vantagem de utilizarmos o MMQ contínuo para aproximar uma função $f(x)$ por outra função?

49) Para aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio de segundo grau num intervalo $[a;b]$ podemos utilizar o MMQ polinomial com ao menos três pontos da função, ou o MMQ contínuo. Qual deles é mais preciso? Justifique.

50) Vários pontos $(x_i; y_i)$ parecem ser melhor aproximados por uma função da forma $f(x) = a \cdot e^{bx}$. Onde $a; b \in \mathbb{R}$. Descreva como adaptamos o MMQ para determinar os valores de $a; b$ mais adequados.

51) Vários pontos $(x_i; y_i)$ parecem ser melhor aproximados por uma função da forma $f(x) = \frac{1}{a+bx}$. Onde $a; b \in \mathbb{R}$. Descreva como adaptamos o MMQ para determinar os valores de $a; b$ mais adequados.

52) Vários pontos $(x_i; y_i)$ parecem ser melhor aproximados por uma função da forma $f(x) = \frac{1}{a+bx+cx^2}$. Onde $a; b; c \in \mathbb{R}$. Descreva como adaptamos o MMQ para determinar os valores de $a; b; c$ mais adequados.

53) Vários pontos $(x_i; y_i)$ parecem ser melhor aproximados por uma função da forma $f(x) = \frac{x}{a+bx}$. Onde $a; b \in \mathbb{R}$. Descreva como adaptamos o MMQ para determinar os valores de $a; b$ mais adequados.

54) Explique porque nós minimizamos $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$ ao invés de $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)$ na dedução do MMQ

55) Explique porque nós minimizamos $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2$ ao invés de $\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|$ na dedução do MMQ

56) Qual a interpretação geométrica da fórmula do erro para MMQ contínuo, dada por $\int_a^b \left(f(x) - p(x)\right)^2$?

Exercícios de Cálculos

Atenção: Nessa lista, utilize quatro casas decimais para os cálculos. Lembre-se de que você pode utilizar qualquer software/programa para resolver os cálculos envolvidos. Apenas deixe indicado qual software/programa você utilizou para fazer os cálculos.

1) Determine o polinômio interpolador pelos pontos $(-2;1);(-1;0);(0;2);(1;0);(2;K_5-6)$, onde $K_5 = K\ mod\ 5\ldots$
   a) …através do polinômio interpolador de Lagrange.
   b) …através do polinômio interpolador de Newton.
   c) …através do polinômio interpolador de Newton-Gregory.

2) Determine o polinômio interpolador pelos pontos $(-1;1);(0;2);(1;4);(2;5-K_3)$, onde $K_3 = K\ mod\ 3\ldots$
   a) …através do polinômio interpolador de Lagrange.
   b) …através do polinômio interpolador de Newton.
   c) …através do polinômio interpolador de Newton-Gregory.

3) Considere a função $f(x) = 2^x$, no intervalo $[-1;3]$.
   a) Utilizando 3 pontos equidistantes no intervalo dado, crie um polinômio interpolador para essa função.
   b) Utilizando 5 pontos equidistantes no intervalo dado, crie um polinômio interpolador para essa função.
   c) Com a fórmula do erro, estime o erro cometido ao se calcular $2^{\sqrt{2}}$ para cada um dos itens.

4) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ um número real positivo, que não admita raiz quadrada exata. Sejam $p;q \in \mathbb{N}$, números naturais consecutivos, tais que $p^2 < \alpha < q^2$. (Ou seja, os números naturais mais próximos de $\sqrt{\alpha}$). Utilizando um polinômio interpolador de grau 1, calcule um valor aproximado para $\sqrt{\alpha}$, em função de α, p e q.

5)
   a) Crie um polinômio interpolador de 3º grau para estimar o valor da função $f(x) = \arccos(x)$ no intervalo $[0;0.5]$.
   b) Com uma calculadora, calcule o erro relativo cometido ao se calcular $\arccos(0.3)$ utilizando esse polinômio para aproximar.
   c) Ainda com uma calculadora, calcule o erro relativo ao se utilizar o mesmo polinômio para estimar um valor para $\arccos(0.9)$. Comente o ocorrido.

6) Considere a função $f(x) = x\cos(3x)$, no intervalo $[-0.6;0.6]$.
   a) Construa uma tabela de valores para essa função, utilizando $h = 0.1$. Essa função seria melhor aproximada por uma função polinomial de primeiro, segundo ou terceiro grau? Justifique.
   b) Utilizando 5 pontos da tabela criada no item anterior, faça o MMQ polinomial para criar um polinômio como o sugerido no item anterior.
   c) Utilizando os 13 pontos da tabela criada no item a), faça o MMQ polinomial para criar um polinômio como o sugerido no item anterior.
   d) Faça o MMQ contínuo para essa função, ainda utilizando o polinômio com o mesmo grau proposto no item a) (utilize software para calcular as integrais!), para aproximar $f(x)$
   e) Qual das aproximações deve ter o menor erro? Justifique, sem a necessidade de apresentar cálculos.

7) Seja $f: [-\pi;\pi] - \mathbb{R}, f(x) = sen^2(x)$
   a) Justifique porque faz mais sentido tentar aproximar essa função por $g_1(x) = a_0 + a_1 sen(x) + a_2\cos(x) + a_3 sen(2x) + a_4\cos(2x)$ do que por $g_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$.
   b) Utilizando MMQ contínuo, calcule os coeficientes $a_0;a_1;a_2;a_3;a_4$ propostos no item anterior, para fazer a aproximação $f(x) \approx g_1(x)$. (Utilize software para calcular as integrais!)

Exercícios de Modelagem

1) Sabendo- se que $\sum_{i=1}^{n}(i^3 - 2i^2 + i)$ é um polinômio de quarto grau, proponha um método, através de interpolação polinomial, que determine esse polinômio.

2) Sabendo-se que $\sum_{i=1}^{n} i^4$ é um polinômio de quinto grau, proponha um método, através de interpolação polinomial, que determine esse polinômio.

3) Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ um número real positivo, que não admita raiz quadrada exata. Sejam $p;q \in \mathbb{N}$, números naturais consecutivos, tais que $p^2 < \alpha < q^2$. (Ou seja, os números naturais mais próximos de $\sqrt{\alpha}$). Proponha um método para determinar uma boa aproximação para $\sqrt{\alpha}$, utilizando um polinômio interpolador de grau 2.

4) Descreva um método que expande a ideia do exercício anterior, para determinar $\sqrt[n]{\alpha}$.

5) A tabela a seguir mostra o calor específico de uma solução, de acordo com a concentração de um certo sal na solução:

Concentração (g/ℓ)	0	10	20	30	40
Calor específico (cal/gºC)	1,0000	0.9987	0.9962	0.9933	0.9891

a) Proponha um método para determinar uma função polinomial de segundo grau que calcule o calor específico em função da concentração.

b) Utilizando essa função, como estimar o calor específico para uma concentração de 25g/ℓ?

c) Ainda utilizando a mesma função, como proceder para descobrir qual concentração irá fornecer um calor específico de 0.9900cal/gºC?

6) Proponha um método, utilizando a matéria dessa lista, para estimar um valor para $\int_0^1 \mathrm{x}^4 \cdot arctg(x^2+1)dx$