Cálculo Numérico

Lista 01

Professor: Daniel Henrique Silva

Essa lista abrange erros computacionais, sistemas lineares, e zeros de funções, e cobre a matéria da primeira prova.

Instruções gerais para entrega

Nem todos os exercícios devem ser entregues. Essa lista é dividida em três partes, exercícios teóricos, exercícios de cálculos, e exercícios de modelagem. Cada parte possui alguns exercícios que devem ser entregues, e outros que não devem ser entregues, de acordo com o seu coeficiente K. No caso de dúvidas sobre qual é o seu coeficiente K, você pode consultar o professor em qualquer aula, perguntar via email **danielhs@dm.ufscar.br**, ou ainda conferir no site do curso, ao lado do seu RA, na lista disponível em www.cursoiglu.com, a mesma instrução vale para dúvidas em relação à operação "mod", utilizada na lista.

A data de entrega é dia **19/09**, data da primeira prova. Os exercícios correspondentes para serem entregues da lista podem ser entregues pessoalmente, na hora da prova, ou por email, para **danielhs@dm.ufscar.br**, com o assunto TRABALHO DE CÁLCULO NUMÉRICO.

LISTAS ENTREGUES FORA DO PRAZO NÃO SERÃO ACEITAS!!!!

Sobre os exercícios teóricos: Seja N_T o número do exercício teórico, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios teóricos tais que $N_T\ \boldsymbol{mod}\ 8 = K\ \boldsymbol{mod}\ 8$.

A operação mod é o resto da divisão entre números inteiros. Por exemplo, $29\ mod\ 8$ é o resto obtido ao dividirmos 29 por 8. No caso, 29 dividido por 8 resulta em 3, deixando resto 5. Se seu K for igual a 29, você deverá resolver os exercícios teóricos números $5; 13; 21; 29; 37; 45; 53; 61; 69; 77; 85; 93; 101$ e 109. Se o seu K for igual a 7, $7\ mod\ 8 = 7$, e você deve entregar os exercícios $7; 15; 23; 31; 39; 47; 55; 63; 71; 79; 87; 95; 103$ e 111.

Nada impede você de fazer outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de cálculos: Seja N_C o número do exercício de cálculo, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios de cálculos tais que $N_C\ \boldsymbol{mod}\ 2 = K\ \boldsymbol{mod}\ 2$. Então, por exemplo, se seu K é 13, então $13\ mod\ 2 = 1$. Nesse caso, você deve resolver os exercícios de cálculos números $1; 3; 5$ e 7. Em outro exemplo, se seu K for igual a 18, então $18\ mod\ 2 = 0$, e você deve resolver os exercícios $2; 4; 6$ e 8.

Para os exercícios de cálculos, é altamente recomendável que você faça os cálculos utilizando software computacional, ou ao menos uma calculadora. Caso você deseje ganhar velocidade para a hora da prova, treine utilizando a mesma calculadora que você pretende usar na prova.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Sobre os exercícios de modelagem: Seja N_M o número do exercício de modelagem, e seja K a sua posição na lista de presença. Você deve resolver os exercícios de modelagem tais que $N_M\ \boldsymbol{mod}\ 5 = K\ \boldsymbol{mod}\ 5$. Então, por exemplo, se seu K for igual a 33, como $33\ mod\ 5 = 3$, então você deve resolver os exercícios $3; 8; 13$ e 18.

Os exercícios de modelagem visam transformar problemas em sistemas e/ou equações. Você não precisa resolver nenhum sistema ou equação nessa parte da lista. Apenas modele o problema.

Nada impede você de fazer os outros exercícios para estudar, mas apenas os exercícios indicados são para entrega.

Atenção com os exercícios que deverão ser entregues. Exercícios que não são os devidos de acordo com o seu K serão desconsiderados, e as notas correspondentes diminuídas!

Bom trabalho, e bons estudos!

Exercícios teóricos

1) Defina erro de modelagem, e dê um exemplo prático.

2) Defina erro de arredondamento, e dê um exemplo numérico.

3) Defina erro de transição binária, e dê um exemplo numérico que não seja o mesmo dado em sala.

4) Baseado em um exemplo numérico, explique o porquê de erros de transição binária serem inevitáveis em programação numérica.

5) Descreva a diferença entre erro absoluto e erro relativo, dando um exemplo numérico.

6) Defina erro de underflow, dando um exemplo numérico.

7) Defina erro de overflow, dando um exemplo numérico.

8) Ao se fazer um cálculo tentando estimar o número de Euler, um desatento programador realiza o cálculo $\left(1+\frac{1}{10^{20}}\right)^{10^{20}}$, e obtém o resultado 1, obviamente errado. Que tipo de erro foi cometido?

9) Em um famoso jogo da série Final Fantasy, os pontos de vida de um inimigo são um valor inteiro, armazenado utilizando 16 bits, podendo assumir valores de 0 até $65535 = 2^{16} - 1$. Nesse jogo, há um inimigo com 65535 pontos de vida. Ao se dar uma poção para esse inimigo, os pontos de vida dele caem para um valor próximo de zero, devido a um erro computacional estudado em aula. Que erro é esse?

10) Explique a diferença entre um método direto e um método iterativo.

11) Já foi visto em aula que, se $\bar{x}$ é um valor exato, aproximado por um valor x, então o erro relativo cometido é dado pela expressão $E_r = \frac{|\bar{x} - x|}{|\bar{x}|}$. Essa fórmula é viável computacionalmente? Justifique.

12) Se um sistema $Ax = b$ é tal que a matriz A possui mais linhas do que colunas, isso quer dizer que o sistema é obrigatoriamente impossível? Justifique, ou dê um contraexemplo.

13) Se um sistema $Ax = b$ é tal que a matriz A possui mais colunas do que linhas, isso quer dizer que o sistema é obrigatoriamente indeterminado? Justifique, ou dê um contraexemplo.

14) Dado um sistema linear $Ax = b$, dê condições para que esse sistema tenha solução única.

15) Um sistema linear pode ter uma única, nenhuma, ou infinitas soluções. Explique porque nós trabalhamos apenas com sistemas que possuem uma única solução computacionalmente.

16) Escreva um algoritmo para resolver um sistema triangular superior. Não se esqueça de declarar todas as variáveis utilizadas antes de escrever seu algoritmo.

17) Escreva um algoritmo para resolver um sistema triangular inferior. Não se esqueça de declarar todas as variáveis utilizadas antes de escrever seu algoritmo.

18) Imagine um sistema linear do tipo $Ax = b$, no qual $a_{11} = 0$. Explique porque não é possível fazer escalonamento nessa matriz sem realizar trocas de linhas.

19) Porque usamos a estratégia de pivoteamento para resolver um sistema linear pelo método de Gauss?

20) Escreva um algoritmo para o escalonamento de uma matriz utilizando Gauss com pivoteamento parcial. Não se esqueça de declarar as variáveis antes de escrever seu algoritmo.

21) Mencione uma vantagem e uma desvantagem entre o método de Gauss com pivoteamento parcial, e o escalonamento direto.

22) Explique as diferenças de estratégia de pivoteamento parcial e pivoteamento total.

23) Mencione uma vantagem e uma desvantagem entre o método de Gauss com pivoteamento parcial, e pivoteamento total.

24) Embora o método de pivoteamento total exija menos computacionalmente por fazer cálculos com números menores que o pivoteamento total, ele não é um método muito utilizado na prática. Porque?

25) Seja um sistema do tipo $Ax = b$, onde A_{20x20} é uma matriz conhecida. Calcule quantas comparações são necessárias para determinar os pivôs (somando todas as iterações) por pivoteamento parcial, e por pivoteamento total.

26) Explique o princípio de funcionamento do método LU para resolução de sistemas lineares, deixando bem claro como o sistema é resolvido após feita a decomposição LU de uma matriz quadrada. (Não é necessário explicar como a decomposição é feita nessa questão)

27) Quais são os critérios necessários para que exista a decomposição LU de uma matriz A?

28) Quais são os critérios necessários para que um sistema linear possa ser resolvido através de decomposição LU?

29) Uma das condições necessárias para que haja decomposição LU em uma matriz é que seus menores principais sejam não-nulos. Dê um exemplo numérico onde trocas de linha podem contornar isso.

30) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método LU em relação ao método de Gauss com pivoteamento parcial para resolução de sistemas lineares.

31) Escreva as fórmulas para obtenção dos elementos das matrizes L e U na decomposição LU. (Assuma que não são necessárias trocas de linha).

32) Enuncie (mas não demonstre) o teorema da decomposição LU.

33) Dê um exemplo, preferencialmente prático, de onde a decomposição LU é conveniente.

34) Explique a base de funcionamento do método de Gauss-Jordan para resolução de sistemas.

35) Escreva um algoritmo para a resolução de sistemas lineares através do método de Gauss-Jordan. Não se esqueça de declarar quais são as variáveis do seu algoritmo.

36) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Gauss-Jordan em relação ao método de Gauss com pivoteamento parcial.

37) Explique como o método de Gauss-Jordan nos permite calcular matrizes inversas.

38) Explique porque o método de Gauss-Jordan nos permite calcular matrizes inversas.

39) Tanto o método de Gauss-Jordan quanto o método LU nos permitem calcular diversos sistemas ao mesmo tempo. Mencione uma vantagem e uma desvantagem de um em relação ao outro nessa situação.

40) Explique a diferença entre métodos diretos e métodos iterativos para resolução de sistemas lineares.

41) Seja $x = (x_1; x_2; \dots x_n)^t$ um vetor. Descreva como calcular $||x||_1$; $||x||_2$ e $||x||_\infty$

42) Prove que $||x||_1 \geq ||x||_\infty$.

43) Dê condições para um vetor $x = (x_1; x_2; \dots x_n)^t$ para que $||x||_1 = ||x||_\infty$

44) Dentre as três formas de se calcular norma de um vetor apresentadas no curso, qual a mais viável computacionalmente? Justifique.

45) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro absoluto na norma 1, em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

46) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro absoluto na norma 2, em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

47) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro absoluto na norma infinito (ou, norma do máximo), em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

48) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro relativo na norma 1, em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

49) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro relativo na norma 2, em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

50) Se $x^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, e $x^{(n)} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, escreva uma fórmula para o erro relativo na norma infinito (ou, norma do máximo), em função dos coeficientes $a; b; c; d; e$ e f.

51) Descreva como é feito o processo de Gauss-Jacobi (ou Jaboci-Richardson) para a resolução de sistemas lineares. Não se esqueça de incluir o critério de parada.

52) Descreva como é feito o processo de Gauss-Seidel para a resolução de sistemas lineares. Não se esqueça de inclui o critério de parada.

53) Destaque as diferenças entre os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

54) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Gauss-Seidel em relação ao método de Gauss-Jacobi.

55) Escreva como funciona o processo de Gauss-Jacobi matricialmente. Não se esqueça de destacar como são as matrizes de iteração.

56) Escreva como funciona o processo de Gauss-Jordan matricialmente. Não se esqueça de destacar como são as matrizes de iteração, mas não se preocupe em deixar matrizes inversas indicadas.

57) Na teoria de zeros de funções reais, temos como objetivo determinar um valor (ou vários valores) nos quais uma função $f(x)$ se anula. Descreva como adaptar essa teoria para resolver uma equação na forma $g(x) = h(x)$.

58) Enuncie um problema prático da sua área onde a teoria de zeros de funções pode ser útil.

59) Enuncie (mas não demonstre) o teorema do anulamento.

60) Dê um exemplo de uma função $f: [-1; 1] \to \mathbb{R}$, tal que $f(-1) \cdot f(1) < 0$, mas a função não possui raiz real no intervalo $[-1; 1]$

61) Foi visto em aula que se $f(x)$ é contínua em $[a; b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então a função tem ao menos uma raiz real no intervalo $]a; b[$. Justifique geometricamente essa afirmação.

62) Justifique porque a função deve ser contínua para satisfazer o teorema do anulamento, apresentando um contraexemplo.

63) O teorema do anulamento não nos permite determinar raízes duplas. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

64) A volta do teorema do anulamento é verdadeira? Ou seja, para toda raiz $\bar{x}$, existirão pontos a e b tais que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $\bar{x} \in [a; b]$? Justifique, ou mostre um contraexemplo.

65) A função $f(x) = (x-3)^2 \cdot x^2 \cdot (x+3)^2$ possui três raízes reais, mas $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Isso vai contra o teorema do anulamento?

66) Explique como o erro para zeros de funções pode ser calculado tanto em relação ao eixo x quanto em relação ao eixo y.

67) Utilizando software, veja como é o gráfico da função $f(x) = \log_{10}(1000 + x) - 3$. Para essa função, nós obteremos um valor mais próximo da raiz se utilizarmos um erro em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y? Justifique.

68) Utilizando software, veja como é o gráfico da função $g(x) = 10^{x-3} - 1$. Para essa função, nós obteremos um valor mais próximo da raiz se utilizarmos um erro em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y? Justifique.

69) Em situações práticas, o erro em relação ao eixo x é mais utilizado do que o erro em relação ao eixo y. Porque essa prática é mais comum?

70) O que é mais eficiente em termos de precisão, um programa que compare erros em relação ao eixo x e ao eixo y e pare quando atingir o resultado em ambos, ou um programa que faça o mesmo, e pare quando atingir o primeiro dos dois critérios? Justifique.

71) O que é mais eficiente em termos de velocidade, um programa que compare erros em relação ao eixo x e ao eixo y e pare quando atingir o resultado em ambos, ou um programa que faça o mesmo, e pare quando atingir o primeiro dos dois critérios? Justifique.

72) Explique a base de funcionamento para o método da bissecção, incluindo seu critério de parada.

73) Escreva um algoritmo para o método da bissecção, assumindo que o intervalo $[a; b]$, a função $f(x)$, e a margem de erro ε são dados. Não se esqueça de descrever quaisquer outras variáveis utilizadas.

74) O método da bissecção consegue encontrar raízes duplas? Justifique.

75) O método da bissecção pode ser utilizado na função $f(x) = x^2(x-1)$, cujas raízes são 0 e 1. Se partirmos do intervalo $[-2; 3]$, para qual das raízes o método irá convergir?

76) O método da bissecção pode ser utilizado na função $f(x) = x^2(x-1)$, cujas raízes são 0 e 1. Se partirmos do intervalo $[-2; 2]$, para qual das raízes o método irá convergir?

77) Quais condições devem ser satisfeitas para que o método da bissecção tenha sua convergência garantida?

78) Deduza o número n mínimo de iterações necessárias para que o método da bissecção convirja com margem de erro ε, partindo de um intervalo inicial $[a; b]$, em função de ε, a e b.

79) Explique como funciona o método das aproximações sucessivas (ou método iterativo linear) para determinar zeros de funções.

80) Explique graficamente a ideia por trás do método das aproximações sucessivas, em três casos, um quando a função $\varphi(x)$ é crescente e o método converge, um quando a função $\varphi(x)$ é decrescente e o método converge, e outra quando o método diverge.

81) Dada uma função $f(x)$ genérica, mostre que sempre há pelo menos dois modos de se criar duas funções de iteração para o método das aproximações sucessivas, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$. (Não se preocupe em verificar se essas funções convergem ou não. Apenas mostre que é possível cria-las, mesmo que elas divirjam).

82) Escreva um algoritmo para o método das aproximações sucessivas, assumindo que a convergência seja assegurada. São dadas a função de iteração $\varphi(x)$, o intervalo inicial $[a; b]$, e a margem de erro ε. Não se esqueça de declarar quaisquer outras variáveis que você utilizar no algoritmo.

83) Escreva um algoritmo para o método das aproximações sucessivas, assumindo que nós não sabemos se convergência é assegurada. São dadas a função de iteração $\varphi(x)$, o intervalo inicial $[a; b]$, e a margem de erro ε, e o número máximo de iterações N_{max}. Não se esqueça de declarar quaisquer outras variáveis que você utilizar no algoritmo.

84) Quais condições o método das aproximações sucessivas deve cumprir para que sua convergência seja assegurada?

85) Interprete graficamente a condição $|\varphi'(x)| < 1, x \in [a; b]$ para a convergência do método das aproximações sucessivas.

86) Mencione uma vantagem e um desvantagem do método das aproximações sucessivas em relação ao método da bissecção para a obtenção de zeros de funções.

87) O método das aproximações sucessivas por determinar raízes duplas? Justifique.

88) O que acontece no método das aproximações sucessivas se a função de iteração $\varphi(x)$ for constante? Justifique algébrica ou geometricamente.

89) Explique geometricamente o funcionamento do método de Newton para determinar zeros de funções reais.

90) Escreva um algoritmo para o método de Newton para determinar zeros de funções, assumindo que sua convergência é assegurada. São dadas a função $f(x)$, o intervalo inicial $[a; b]$, e a margem de erro ε. Não se esqueça de declarar outras variáveis que você usar no algoritmo.

91) Escreva um algoritmo para o método de Newton para determinar zeros de funções, assumindo que não sabemos se convergência é assegurada. São dadas a função $f(x)$, o intervalo inicial $[a; b]$, a margem de erro ε, e o número máximo. Não se esqueça de declarar outras variáveis que você usar no algoritmo.

92) Quais condições devem ser satisfeitas para que tenhamos garantida a convergência do método de Newton para zeros de funções?

93) Verdadeiro ou falso: “O método de Newton sempre converge mais rapidamente que a bissecção”. Justifique, ou dê um contraexemplo.

94) Justifique a afirmação: “O método de Newton é um caso especial do método de aproximações sucessivas”.

95) Deduza os critérios para convergência do método de Newton a partir dos critérios de convergência do método das aproximações sucessivas.

96) O método de Newton pode determinar raízes duplas? Justifique.

97) Demonstre algebricamente que o método de Newton sempre determina solução de equações de primeiro grau na primeira iteração, com erro zero.

98) Argumente geometricamente porque o método de Newton sempre determina solução de equações de primeiro grau na primeira iteração, com erro zero.

99) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Newton em relação ao método da bissecção para a obtenção de zeros de funções reais.

100) Mencione uma vantagem e uma desvantagem do método de Newton em relação ao método das aproximações sucessivas para a obtenção de zeros de funções.

101) Computacionalmente, o método de Newton é o mais rápido para a obtenção de raízes reais em zeros de funções, mas esse método não é muito utilizado na prática. Porque?

102) Explique geometricamente o funcionamento do método das secantes para determinar zeros de funções reais.

103) Escreva um algoritmo para o método das secantes para determinar zeros de funções, assumindo que sua convergência é assegurada. São dadas a função $f(x)$, o intervalo inicial $[a;b]$, e a margem de erro ε. Não se esqueça de declarar outras variáveis que você usar no algoritmo.

104) Escreva um algoritmo para o método das secantes para determinar zeros de funções, assumindo que não sabemos se convergência é assegurada. São dadas a função $f(x)$, o intervalo inicial $[a;b]$, a margem de erro ε, e o número máximo. Não se esqueça de declarar outras variáveis que você usar no algoritmo.

105) Quais condições devem ser satisfeitas para que tenhamos garantida a convergência do método das secantes para zeros de funções?

106) Diferencie o método de Newton e das secantes para obtenção de zeros de funções reais, mencionando uma vantagem e uma desvantagem de um método sobre o outro.

107) Verdadeiro ou falso: “O método de Newton e o método das Secantes possuem o mesmo critério para convergência”. Justifique, ou dê um contraexemplo.

108) Se uma função possui três raízes reais distintas, proponha um método para determinar individualmente cada raiz.

109) Defina intuitivamente ordem de convergência de um método para zeros de funções.

110) O método de Newton possui convergência quadrática. O que isso significa em relação ao erro do método?

111) Classifique em relação a ordem de convergência o método da bissecção, o método de Newton e o método das secantes.

112) O método das aproximações sucessivas não possui uma ordem de convergência determinada. Porque isso ocorre?

Exercícios de Cálculos

Atenção: Nessa lista, utilize quatro casas decimais para os cálculos de problemas com sistemas lineares, e cinco casas decimais para cálculos de problemas com zeros de funções. Lembre-se de que você pode utilizar qualquer software/programa para resolver os cálculos envolvidos. Apenas deixe indicado qual software/programa você utilizou para fazer os cálculos.

1) Considere o sistema linear dado por $\begin{cases} 3.2x_1 + 0.4x_2 + x_3 - 0.6x_4 = 1.34 \\ 1.2x_1 - 2.5x_2 + 0.2x_4 = 1.71 \\ 1.4x_1 - 0.8x_2 + 4.2x_3 - 0.6x_4 = 1.86 \\ -0.2x_1 + 0.5x_2 + 1.5x_3 + 5.2x_4 = -0.55 \end{cases}$

a) Verifique quais métodos (diretos e iterativos) podem ser aplicados para a resolução desse sistema.
b) Resolva esse sistema linear através de todos os métodos diretos.
c) Para cada um dos métodos iterativos, faça três passos de cada método, partindo do ponto $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e analisando o erro relativo cometido em cada iteração, utilizando a norma infinita (do máximo).

2) Considere o sistema linear dado por $\begin{cases} 0.3x_1 - 0.1x_2 + 4.1x_3 + 0.5x_4 = 1.18 \\ -0.9x_1 - 0.2x_2 + 0.6x_3 + 5.3x_4 = 0.11 \\ 5.8x_1 - 0.9x_2 + 0.7x_3 + 0.9x_4 = -6.55 \\ -0.4x_1 + 3.3x_2 + 0.8x_3 = 1.75 \end{cases}$

a) Verifique quais métodos (diretos e iterativos) podem ser aplicados para a resolução desse sistema.
b) Resolva esse sistema utilizando todos os métodos diretos.
c) Fazendo trocas de linha, mostre que esse sistema pode ser resolvido pelos métodos iterativos.
d) Para cada um dos métodos iterativos, faça dois passos de cada método, partindo do ponto $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e analise o erro relativo cometido em cada iteração, utilizando a norma infinito (do máximo).

3) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Verifique que, sem fazer trocas de linha, a decomposição LU dessa matriz não é possível.

b) Fazendo trocas de linhas para essa matriz, determine a decomposição LU para essa matriz (depois das trocas de linha feitas).

c) Resolva os sistemas $Ax = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}; Ax = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; Ax = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

4) Seja o sistema linear dado por $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 = -3 \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

a) Justifique porque é impossível aplicar qualquer um dos métodos iterativos para esse sistema sem realizar trocas de linha.

b) Fazendo as trocas de linha necessárias para garantir que a convergência dos métodos iterativos são garantidas, resolva o sistema dado, pelo método iterativo de sua preferência, utilizando erro relativo dado pela norma infinito (do máximo), até que $\varepsilon < 0.001$, partindo do ponto inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5) Seja a função polinomial dada por $f(x) = -1.2x^3 - 1.6868x^2 + 14.4321x - 7.2533$.

a) Utilizando algum software gráfico, faça um esboço do gráfico dessa função no intervalo $[-5; 5]$.

b) Demonstre que essa função irá possuir três raízes reais distintas, e determine intervalos $I_1; I_2; I_3$ tais que cada intervalo contenha uma única raiz do polinômio.

c) Caso você aplique o método da bissecção no intervalo $[-5; 5]$, para qual das raízes o método irá convergir?

d) Quantas iterações são necessárias para que o método da bissecção convirja, a partir do intervalo $[-5; 5]$, com margem de erro absoluto $\varepsilon < 0.0001$? (Note que não é necessário calcular as iterações)

e) Determine qualquer uma das raízes a sua escolha, partindo de um dos intervalos $I_1; I_2; I_3$ determinados no item b), com margem de erro absoluto $\varepsilon < 0.01$.

6) Seja a função polinomial $f(x) = 2x^2 - 5x - 17$

a) Demonstre que essa função possui duas raízes reais distintas, sendo uma positiva e uma negativa.

b) Construa ao menos quatro diferentes funções de iteração $\varphi(x)$ que possam ser utilizadas no método das aproximações sucessivas. (Não se preocupe em verificar se as funções convergem ou não)

c) Determine um intervalo no qual a função de iteração $\varphi(x) = \frac{\sqrt{5x + 17}}{2}$ irá convergir para a raiz positiva do problema.

d) Com a função do item anterior, aplique o método das aproximações sucessivas, e determine a raiz com erro absoluto $\varepsilon < 0.001$

7) Dada a função $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x - 2$

a) Demonstre que essa função possui uma raiz real no intervalo $[1; 2]$

b) Mostre (utilizando software gráfico) que o método de Newton tem sua convergência garantida no intervalo $[1; 2]$

c) Calcule a raiz desse problema pelo método de Newton com erro relativo $\varepsilon < 0.00001$

8) Dada a função $f(x) = \ln(x^2 + 1) + x - 2$

a) Demonstre que essa função possui uma raiz real no intervalo $[1; 2]$

b) Mostre (utilizando software gráfico) que o método das secantes tem sua convergência garantida no intervalo $[1; 2]$

c) Calcule a raiz desse problema pelo método das secantes com erro relativo $\varepsilon < 0.001$

Exercícios de Modelagem

1) Escreva o sistema linear cuja solução é o ponto de intersecção entre os planos:

$\alpha: 3x - 2y + z = 10; \beta: 7x + 5y - z = 7; \gamma: x - 3y + z = 7$

2) Modele um sistema linear que determine uma função de segundo grau que passa pelos pontos cujas coordenadas são $(2;\ 4), (-1;\ 5)$ e $(0;\ -2)$

3) Modele um sistema linear que determine uma equação de terceiro grau do tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que ela passe pelos pontos $(2; 1); (1; 4); (0;\ -3); (-1;\ -2)$.

4) A soma dos primeiros "$n + 1$" números naturais, ou seja, $0 + 1 + 2 + \ldots + n$, é dado por uma equação de segundo grau, do tipo $ax^2 + bx + c$. Modele um sistema linear que calcule os valores de $a; b$ e c. (Embora seja possível se deduzir isso com soma de P.A., faça o sistema linear correspondente)

5) A soma dos "$n + 1$" primeiros quadrados, ou seja: $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ será uma equação de terceiro grau, do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Modele um sistema linear cuja solução determine os coeficientes da função de terceiro grau em questão. (Esse exercício também pode ser resolvido por séries, mas faça através de sistemas lineares!)

6) Analogamente, a soma dos primeiros "$n + 1$" cubos perfeitos, $0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ será uma equação de quarto grau. Crie o sistema que modela esse problema.

O método das frações parciais, muito utilizado em equações diferenciais transforma uma fração entre dois polinômios, onde o grau do polinômio numerador é menor do que o do polinômio denominador é transformado em uma soma de frações, onde cada uma delas tem numerador como sendo um número real, e denominador de primeiro grau. Todo o método é baseado na resolução de sistemas lineares. Descubra, para cada item, quais são os valores dos coeficientes reais A, B, C... que tornem as equações verdadeiras:

7) $\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$

8) $\frac{x^2+9x+2}{(x-2)x(x+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+1)}$

9) $\frac{-5x^2-6x+3}{(x-1)x(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+3)}$

10) $\frac{2.5x^2+9x-1.5}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$

11) Em um restaurante japonês são vendidas várias opções de "combos" de almoço, com preços variados. Na lista, nós temos as seguintes opções, seguida pelos relativos preços:

Combo Individual Executivo: 4 Sushis + 2 Sashimis + 1 Bolinho da sorte + 1 Sakê = R$ 9,60
Combo Familiar : 15 Sushis + 10 sashimis + 5 Bolinhos da sorte = R$ 29,00
Combo Grupo Executivo :12 Sushis + 6 Sashimis + 3 Bolinhos da sorte + 7 Sakê = R$ 40,80
Combo Super Sumô : 20 Sushis + 20 sashimis + 4 Bolinhos da sorte + 2 Sakê = R$ 56,00

Suponha que não hajam promoções (ou seja, não há descontos em cada combo). Modele um sistema linear que determine o preço de cada item individual do cardápio.

12) Quarto números são tais que suas somas, três a três são iguais a 22, 24, 27 e 29. Modele um sistema linear que calcule que números são esses.

13) Seja f(x) a função f(x) = $3\cos(x).x^2$. Determine um modelo computacional para encontrar o menor valor para x positivo tal que f(x) = -5.

14) Um vendedor de churros percebeu que, vendendo churros à R$ 1,80, ele conseguia vender 1200 churros por dia. Além disso, para cada R$ 0,10 a mais no preço dos churros, ele perdia 50 clientes. Determine uma função que calcule o lucro dele, em função da variação de preço x.

15) Uma micro empresa tem seu custo, dado através do tempo, estimado pela função $C(t) = 500 + 400(1.1)^t$, t em meses. Já a sua receita é estimada através da função $R(t) = (2+0.1t)^{3t}$, para t entre 0 e 15. Determine uma função que dê o lucro dessa empresa. E escreva uma equação que determine a partir de qual mês a empresa passa a dar lucro superior a 1000,00.

16) Seja o polinômio de 6º grau f(x) = $x^6 - x^5 - \frac{25x^4}{2} + \frac{17x^3}{2} + 30x^2 - 4x - 12$. Modele uma forma que permita determinar os pontos de inflexão (onde a concavidade do gráfico inverte o sentido) para essa função.

17) Seja a função f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ e seja α um ponto qualquer de seu domínio. Passando-se retas tangentes à f(x) por α, teremos sempre uma inclinação com o eixo x, e um coeficiente angular. Determine uma equação que calcule para qual valor de α esse coeficiente angular será máximo.

18) Proponha uma método para determinar qual valor é maior: e^{π} ou $\boldsymbol{\pi}^e$.

19) A razão áurea é um número irracional, muito presente na arquitetura e no planejamento de objetos do nosso dia a dia. Os lados de um retângulo estão na razão áurea, se a proporção entre os lados é a mesma proporção entre o menor lado, e a diferença entre o lado maior e o menor. Determine uma equação que calcule a razão áurea.

20) Seja f(x) a função modelada na questão 14 (você pode supor ela como pré-calculada). Modele uma função que determine o preço ideal para o lucro máximo.